

# 28

## FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO

La técnica de diagnóstico médico conocida como formación de imágenes por resonancia magnética (IRM) exige que el paciente repose en un campo magnético intenso. Los primeros aparatos de IRM creaban el campo mediante un solenoide. Los aparatos más modernos utilizan dos grandes bobinas, colocadas ya sea arriba y abajo del paciente o en la cabeza y los pies de éste. Este diseño "abierto" ofrece una experiencia mucho menos claustrofóbica para el paciente.

? Si se aumenta el diámetro de una de las bobinas de IRM sin alterar la corriente, ¿aumenta, disminuye o permanece sin cambio el campo magnético que genera en su centro?



En el capítulo 27 estudiamos las fuerzas que se ejercen sobre las cargas en movimiento y sobre los conductores que transportan corriente en un campo magnético. No nos preocupamos de cómo llegó ahí el campo magnético; simplemente tomamos su existencia como un hecho. Pero, ¿cómo se *generan* los campos magnéticos? Sabemos que tanto los imanes permanentes como las corrientes eléctricas de los electroimanes generan campos magnéticos. En este capítulo estudiaremos detenidamente estas fuentes de campo magnético.

Hemos aprendido que una carga genera un campo eléctrico, y que un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga. Pero un campo *magnético* ejerce una fuerza sólo sobre una carga *en movimiento*. ¿Es cierto también que una carga *genera* un campo magnético sólo cuando la carga está en movimiento? En una palabra: sí.

Nuestro análisis se inicia con el campo magnético generado por una sola carga puntual en movimiento. Este análisis nos servirá para hallar el campo generado por un segmento pequeño de un conductor portador de corriente. Una vez hecho esto, podremos en principio hallar el campo magnético creado por un conductor de *cualquier* forma.

A continuación presentaremos la ley de Ampere, que desempeña en el magnetismo un papel análogo al de la ley de Gauss en la electrostática. La ley de Ampere nos permite explotar las propiedades de simetría para relacionar los campos magnéticos con sus fuentes.

Las partículas con carga en movimiento del interior de los átomos responden a los campos magnéticos y también pueden actuar como fuentes de campo magnético. Nos apoyaremos en estas ideas para comprender cómo permiten ciertos materiales magnéticos intensificar campos magnéticos, y también por qué ciertos materiales, como el hierro, actúan como imanes permanentes.

## 28.1 | Campo magnético de una carga en movimiento

Comencemos por lo básico: el campo magnético de una sola carga puntual  $q$  que se desplaza con velocidad constante  $\vec{v}$ . En las aplicaciones prácticas, como las bobinas que se muestran en la fotografía con la que se inicia este capítulo, los campos magnéticos son producto de un número enorme de partículas con carga que se desplazan juntas en una corriente. De cualquier modo, una vez que comprendamos cómo se calcula el campo magnético debido a una sola carga puntual, basta un pequeño paso para calcular el campo debido a un alambre o un conjunto de alambres que transportan corriente.

Tal como lo hicimos en el caso de los campos eléctricos, llamaremos **punto de fuente** a la ubicación de la carga en movimiento en un instante dado, y **punto de campo** al punto  $P$  donde nos proponemos hallar el campo. En la sección 21.4 encontramos que en un punto de campo situado a una distancia  $r$  desde una carga puntual  $q$ , la magnitud del campo *eléctrico*  $\vec{E}$  generado por la carga es proporcional a la magnitud de la carga  $|q|$  y a  $1/r^2$ , y la dirección de  $\vec{E}$  (si  $q$  es positiva) es a lo largo de la línea que une el punto de fuente con el punto de campo. La relación correspondiente al campo magnético  $\vec{B}$  de una carga puntual  $q$  que se desplaza con velocidad constante presenta ciertas semejanzas y ciertas diferencias interesantes.

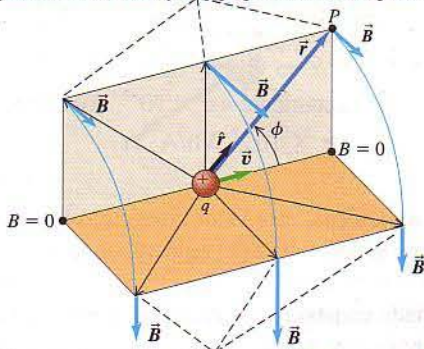
Los experimentos muestran que la magnitud de  $\vec{B}$  también es proporcional a  $|q|$  y a  $1/r^2$ . Pero la *dirección* de  $\vec{B}$  no sigue la línea que va del punto de fuente al punto de campo. En cambio,  $\vec{B}$  es perpendicular al plano que contiene esta recta y al vector de velocidad  $\vec{v}$  de la partícula, como se muestra en la figura 28.1. De la misma manera, la *magnitud* del campo  $B$  también es proporcional a la rapidez  $v$  de la partícula y al seno del ángulo  $\phi$ . Por consiguiente, la magnitud del campo magnético en el punto  $P$  está dada por

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q|v \sin \phi}{r^2} \quad (28.1)$$

donde  $\mu_0/4\pi$  es una constante de proporcionalidad ( $\mu_0$  se pronuncia “mu subíndice cero”). La razón de escribir la constante de esta forma en particular será evidente en breve. Hicimos algo parecido con la ley de Coulomb en la sección 21.3.

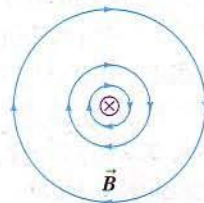
Podemos incorporar tanto la magnitud como la dirección de  $\vec{B}$  en una sola ecuación vectorial utilizando el producto vectorial. Para evitar la necesidad de decir “la dirección desde la fuente  $q$  al punto de campo  $P$ ” una y otra vez, introduciremos el vector *unitario*  $\hat{r}$  (“r con sombrero”) que apunta desde el punto de fuente al punto de campo. (Se utilizó  $\hat{r}$  con el mismo propósito en la sección 21.4). Este vector unitario

Con respecto a estos puntos de campo,  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  yacen en el plano de color tabaco y  $\vec{B}$  es perpendicular a este plano



Con respecto a estos puntos de campo,  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  yacen en el plano de color naranja y  $\vec{B}$  es perpendicular a este plano

(a)



(b)

**28.1** (a) Vectores de campo magnético debidos a una carga puntual positiva  $q$  en movimiento. En cada punto,  $\vec{B}$  es perpendicular al plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , y su magnitud es proporcional al seno del ángulo entre ambos. (b) Líneas de campo magnético en un plano que contiene una carga positiva en movimiento. La  $\times$  indica que la carga se mueve hacia el plano de la página.

es igual al cociente del vector  $\vec{r}$  desde la fuente al punto de campo entre su magnitud:  $\hat{r} = \vec{r}/r$ . En estas condiciones el campo  $\vec{B}$  de una carga puntual en movimiento es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.2)$$

(campo magnético de una carga puntual con velocidad constante)

La figura 28.1 muestra la relación entre  $\hat{r}$  y  $P$ , y también el campo magnético  $\vec{B}$  en varios puntos de los alrededores de la carga. En todos los puntos a lo largo de una línea que pasa por la carga y es paralela a  $\vec{v}$ , el campo es cero porque  $\text{sen } \phi = 0$  en todos esos puntos. A cualquier distancia  $r$  de  $q$ ,  $\vec{B}$  alcanza su magnitud máxima en los puntos que yacen en el plano perpendicular a  $\vec{v}$ , porque en todos esos puntos  $\phi = 90^\circ$  y  $\text{sen } \phi = 1$ . Si la carga  $q$  es negativa, las direcciones de  $\vec{B}$  son opuestas a las que se muestran en la figura 28.1.

Una carga puntual en movimiento también produce un campo *eléctrico*, con líneas de campo que irradian hacia afuera desde una carga positiva. Las líneas de campo *magnético* son totalmente distintas. Lo antes expuesto muestra que, en el caso de una carga puntual que se desplaza con una velocidad  $\vec{v}$ , las líneas de campo magnético son *círculos* centrados en la línea de  $\vec{v}$  y que yacen en planos perpendiculares a esta línea. Las direcciones de las líneas de campo correspondientes a una carga positiva están dadas por la siguiente *regla de la mano derecha*, una de varias con las que nos encontraremos en este capítulo para establecer la dirección del campo magnético creado por diversas fuentes. Sujete el vector de velocidad  $\vec{v}$  con la mano derecha de modo que su pulgar derecho apunte en la dirección de  $\vec{v}$ ; en seguida sus dedos se doblan en torno a la línea de  $\vec{v}$  en el mismo sentido que las líneas de campo magnético (suponiendo que  $q$  es positiva). La figura 28.1a muestra partes de unas pocas líneas de campo; la figura 28.1b muestra algunas líneas de campo en un plano que pasa por  $q$ , perpendicular a  $\vec{v}$ , vistas mirando en la dirección de  $\vec{v}$ .

Las ecuaciones (28.1) y (28.2) describen el campo  $\vec{B}$  de una carga puntual que se desplaza con velocidad *constante*. Si la carga se *acelera*, el campo puede ser mucho más complicado. No necesitaremos estos resultados más complicados para nuestros fines. (Las partículas con carga en movimiento que constituyen una corriente en un alambre se aceleran en los puntos donde el alambre se dobla y la dirección de  $\vec{v}$  cambia. Sin embargo, dado que la magnitud  $v_d$  de la velocidad de deriva en un conductor es típicamente muy pequeña, la aceleración  $v_d^2/r$  también es muy pequeña y se pueden pasar por alto los efectos de la aceleración).

Como señalamos en la sección 27.2, la unidad de  $B$  es un tesla (1 T):

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{C} \cdot \text{m} = 1 \text{ N} / \text{A} \cdot \text{m}$$

Utilizando esta información en la ecuación (28.1) o (28.2), se halla que las unidades de la constante  $\mu_0$  son

$$1 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2 = 1 \text{ N} / \text{A}^2 = 1 \text{ Wb} / \text{A} \cdot \text{m} = 1 \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$$

En unidades SI el valor numérico de  $\mu_0$  es exactamente  $4\pi \times 10^{-7}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb} / \text{A} \cdot \text{m} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A} \end{aligned} \quad (28.3)$$

¡Parece quizá increíble que  $\mu_0$  tenga *exactamente* este valor numérico! De hecho, se trata de un valor *definido* que surge de la definición del amperio, como veremos en la sección 28.4.

En la sección 21.3 mencionamos que la constante  $1/4\pi\epsilon_0$  de la ley de Coulomb está relacionada con la rapidez de la luz  $c$ :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = (10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2) c^2$$

Cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32, encontraremos que su rapidez de propagación en un vacío, que es igual a la rapidez de la luz  $c$ , está dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (28.4)$$

Si despejamos  $\epsilon_0$  de la ecuación  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , sustituimos la expresión resultante en la ecuación (28.4) y despejamos  $\mu_0$  obtendremos en efecto el valor de  $\mu_0$  antes citado. Esta explicación es un poco prematura, pero nos proporciona un indicio de que los campos eléctricos y magnéticos están íntimamente relacionados con la naturaleza de la luz.

### Ejemplo 28.1

## Fuerzas entre dos protones en movimiento

Dos protones se desplazan de manera paralela al eje  $x$  en sentidos opuestos (Fig. 28.2) con la misma rapidez  $v$  (pequeña en comparación con la rapidez de la luz  $c$ ). En el instante que se muestra, halle las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre el protón de arriba y encuentre la proporción de sus magnitudes.

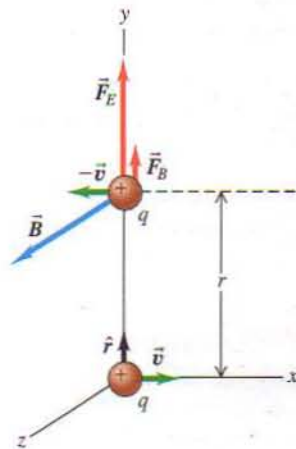
### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** La fuerza eléctrica sobre el protón de arriba se halla con base en la ley de Coulomb. Para encontrar la fuerza magnética, primero se utiliza la ecuación (28.2) para determinar el campo magnético  $\vec{B}$  creado por el protón de abajo en el lugar que ocupa el de arriba. A continuación se calcula la fuerza magnética sobre el protón de arriba con base en la ley de la fuerza magnética [ecuación (27.2)].

**EJECUTAR:** De acuerdo con la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el protón de arriba es

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Las fuerzas son de repulsión y la fuerza sobre el protón de arriba es verticalmente hacia arriba (en la dirección  $+y$ ).



28.2 Fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos protones en movimiento.

De acuerdo con la regla de la mano derecha referente al producto cruz  $\vec{v} \times \hat{r}$  de la ecuación (28.2), el campo  $\vec{B}$  debido al protón de abajo en la posición del protón de arriba tiene la dirección  $+z$  (véase la figura 28.2). Según la ecuación (28.2), la magnitud de  $\vec{B}$  es

$$B = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}$$

puesto que  $\phi = 90^\circ$ . O bien, de acuerdo con la ecuación (28.2),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q(v\hat{i}) \times \hat{j}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2} \hat{k}$$

La velocidad del protón de arriba es  $-\vec{v}$ , y la fuerza magnética que actúa sobre él es  $\vec{F} = q(-\vec{v}) \times \vec{B}$ . Combinando esto con las expresiones de  $\vec{B}$ , se halla que

$$F_B = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi r^2}$$

o bien

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{i}) \times \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2} \hat{k} = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi r^2} \hat{j}$$

La interacción magnética en esta situación también es de repulsión. La proporción de las magnitudes de las dos fuerzas es

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2 v^2 / 4\pi r^2}{q^2 / 4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0 \mu_0 v^2$$

Con base en la relación  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  [ecuación (28.4)], podemos expresar nuestro resultado en términos muy simples como

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Cuando  $v$  es pequeña en comparación con  $c$ , la rapidez de la luz, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica.

**EVALUAR:** Dése cuenta que es indispensable utilizar el mismo marco de referencia en todo este cálculo. Hemos descrito las velocidades y los campos tal como se manifiestan ante un observador que se halla estacionario en el sistema de coordenadas de la figura 28.2. En un sistema de coordenadas que se trasladen con una de las cargas, una de las velocidades sería cero y, por tanto, *no* habría fuerza magnética. La explicación de esta aparente paradoja constituyó uno de los caminos que condujeron a la teoría especial de la relatividad.

### Evalúe su comprensión

Si dos protones viajan paralelos uno del otro en la *misma* dirección y con la misma rapidez, ¿es de atracción o de repulsión la fuerza magnética entre ellos? ¿Y la fuerza neta entre ellos? (Suponga que la rapidez de los protones es mucho menor que la rapidez de la luz.)

## 28.2 | Campo magnético de un elemento de corriente

Como en el caso del campo eléctrico, existe un **principio de superposición de campos magnéticos: el campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales**. Este principio, junto con los resultados de la sección 28.1, nos permite hallar el campo magnético creado por una corriente en un conductor.

Primero se calcula el campo magnético creado por un segmento corto  $d\vec{l}$  de un conductor portador de corriente, como se muestra en la figura 28.3a. El volumen del segmento es  $A dl$ , donde  $A$  es el área de sección transversal del conductor. Si hay  $n$  partículas con carga en movimiento por unidad de volumen, cada una con una carga  $q$ , la carga total  $dQ$  en movimiento en el segmento es

$$dQ = nqA dl$$

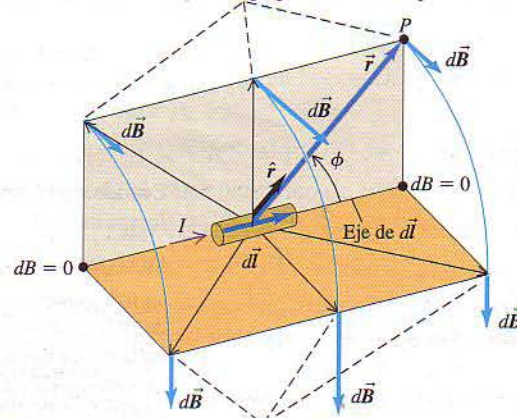
Las cargas en movimiento en este segmento equivalen a una sola carga  $dQ$  que viaja con una velocidad igual a la velocidad de deriva  $\vec{v}_d$ . (Los campos magnéticos debidos a los movimientos aleatorios de las cargas, en promedio, se cancelan en todos los puntos). De acuerdo con la ecuación (28.1) la magnitud del campo resultante  $d\vec{B}$  en cualquier punto de campo  $P$  es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|dQ|v_d \sin \phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n|q|v_d A dl \sin \phi}{r^2}$$

Pero según la ecuación (25.2)  $n|q|v_d A$  es igual a la corriente  $I$  en el elemento. Por tanto,

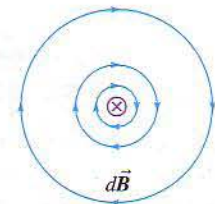
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \phi}{r^2} \quad (28.5)$$

Con respecto a estos puntos de campo,  $\vec{r}$  y  $d\vec{l}$  yacen en el plano de color tabaco y  $d\vec{B}$  es perpendicular a este plano



Con respecto a estos puntos de campo,  $\vec{r}$  y  $d\vec{l}$  yacen en el plano de color naranja y  $d\vec{B}$  es perpendicular a este plano

(a)



(b)

**28.3** (a) Vectores de campo magnético debidos a un elemento de corriente  $d\vec{l}$ . (b) Líneas de campo magnético en un plano que contiene el elemento de corriente  $d\vec{l}$ . La  $\otimes$  indica que la corriente se dirige hacia el plano de la página. Compare esta figura con la figura 28.1 que describe el campo de una carga puntual en movimiento.

En forma vectorial, utilizando el vector unitario  $\hat{r}$  como en la sección 28.1, se tiene lo siguiente:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{campo magnético de un elemento de corriente}) \quad (28.6)$$

donde  $d\vec{l}$  es un vector de longitud  $dl$ , en la misma dirección de la corriente en el conductor.

Las ecuaciones (28.5) y (28.6) se conocen como la **ley de Biot y Savart** (se pronuncia “Bi-ó y Sáh-var”). Esta ley permite hallar el campo magnético total  $\vec{B}$  debido a la corriente en un circuito completo, en cualquier punto del espacio. Para ello, se integra la ecuación (28.6) con respecto a todos los segmentos  $d\vec{l}$  que transportan corriente; en términos de símbolos,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.7)$$

En las secciones que siguen llevaremos a cabo esta integración respecto a varios ejemplos.

Como lo muestra la figura 28.3a, los vectores de campo  $d\vec{B}$  y las líneas de campo magnético de un elemento de corriente son exactamente como los que establece una carga positiva  $dQ$  que se desplaza en la dirección de la velocidad de deriva  $\vec{v}_d$ . Las líneas de campo son círculos que se hallan en planos perpendiculares a  $d\vec{l}$  y están centrados en la línea de  $d\vec{l}$ . Sus direcciones están dadas por la misma regla de la mano derecha que presentamos con respecto a las cargas puntuales en la sección 28.1.

No es posible verificar la ecuación (28.5) ni la (28.6) directamente porque nunca se podrá experimentar con un segmento aislado de un circuito que conduce corriente. Lo que se puede medir experimentalmente es el  $\vec{B}$  total correspondiente a un circuito completo. Con todo, es posible verificar indirectamente estas ecuaciones calculando  $\vec{B}$  con respecto a diversas configuraciones de corriente por medio de la ecuación (28.7) y comparando los resultados con las mediciones experimentales.

Si hay materia presente en el espacio que rodea a un conductor portador de corriente, el campo en un punto de campo  $P$  próximo a él tendrá una contribución adicional debida a la *magnetización* del material. Regresaremos a este punto en la sección 28.8. Sin embargo, a menos que el material sea hierro o algún otro material ferromagnético, el campo adicional es pequeño y, por lo regular, insignificante. Surgen otras complicaciones si están presentes campos eléctricos o magnéticos que varían con el tiempo o si el material es un superconductor; regresaremos a estos temas más adelante.

Estrategia para  
resolver problemas

### Cálculos de campos magnéticos

**IDENTIFICAR** *los conceptos pertinentes:* La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético debido a un alambre portador de corriente de la forma que sea. La idea es calcular el campo debido a un elemento de corriente representativo del alambre, y luego combinar las contribuciones de todos los elementos como ése para hallar el campo total.

**PLANTEAR** *el problema utilizando las siguientes etapas:*

1. Haga un diagrama que muestre el elemento de corriente representativo y el punto  $P$  en el que se va a determinar el campo (el punto de campo).
2. Dibuje el elemento de corriente  $d\vec{l}$ , asegurándose que apunte en la dirección de la corriente.

3. Dibuje el vector unitario  $\hat{r}$ . Advierta que su dirección es siempre *del* elemento de corriente (el punto de fuente) al punto de campo  $P$ .
4. Identifique las variables que se buscan. Por lo regular serán la magnitud y dirección del campo magnético  $\vec{B}$ .

**EJECUTAR** *la solución como sigue:*

1. Con base en la ecuación (28.5) o (28.6), exprese el campo magnético  $d\vec{B}$  en  $P$  a partir del elemento de corriente representativo.
2. Sume todos los  $d\vec{B}$  para hallar el campo total en el punto  $P$ . En ciertas situaciones los  $d\vec{B}$  en el punto  $P$  tienen la misma dirección con respecto a todos los elementos de corriente;

en estos casos la magnitud del campo total  $\vec{B}$  es la suma de las magnitudes de los  $d\vec{B}$ . Pero con frecuencia los  $d\vec{B}$  tienen direcciones diferentes con respecto a los distintos elementos de corriente. Entonces es necesario fijar un sistema de coordenadas y representar cada  $d\vec{B}$  en términos de sus componentes. La integral del  $\vec{B}$  total se expresa entonces en términos de una integral por cada componente.

- A veces se puede aprovechar la simetría de la situación para probar que una componente de  $\vec{B}$  debe desaparecer. Esté alerta siempre para identificar formas de aprovechar la simetría para simplificar el problema.
- Busque maneras de aplicar el principio de superposición de campos magnéticos. Más adelante en este capítulo de-

terminaremos los campos producidos por ciertas formas simples de conductor; si encuentra un conductor de forma compleja que se puede representar como una combinación de estas formas simples, podrá aplicar la superposición para hallar el campo de la forma compleja. Ejemplos de esto son una espira rectangular y un semicírculo con segmentos rectilíneos en ambos lados.

**EVALUAR** la respuesta: En muchos casos su respuesta será una expresión matemática de  $\vec{B}$  en función de la posición del punto de campo. Compruebe la respuesta examinando su comportamiento en tantos límites como sea posible.

### Ejemplo 28.2

## Campo magnético de un segmento de corriente

Un alambre de cobre conduce una corriente constante de 125 A a un tanque de galvanoplastia. Encuentre el campo magnético generado por un segmento de 1.0 cm de este alambre en un punto situado a 1.2 m de él, si el punto es a) el punto  $P_1$ , directamente hacia afuera a un costado del segmento; b) el punto  $P_2$ , sobre una línea a 30° del segmento, como se muestra en la figura 28.4.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Aunque estrictamente las ecuaciones (28.5) y (28.6) se deben usar sólo con elementos de corriente infinitesimales, las podemos utilizar en este caso porque la longitud del segmento (1.0 cm) es mucho menor que la distancia de 1.2 m al punto de campo.

**PLANTEAR:** El elemento de corriente se muestra en rojo en la figura 28.4 y apunta en la dirección  $-x$  (la dirección de la corriente). El vector unitario  $\hat{r}$  correspondiente a cada punto de campo se dirige del elemento de corriente hacia ese punto:  $\hat{r}$  tiene la dirección  $+y$  en el caso del punto  $P_1$  y forma un ángulo de 30° arriba de la dirección  $-x$  en el caso del punto  $P_2$ .

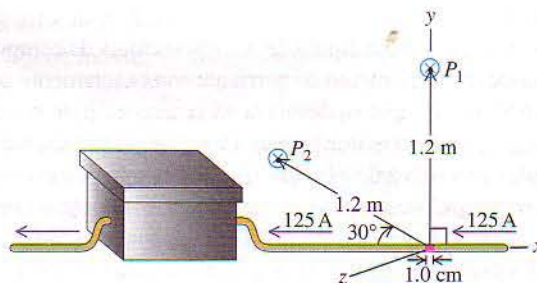
**EJECUTAR:** a) Por la regla de la mano derecha, la dirección de  $\vec{B}$  en  $P_1$  es *hacia* el plano  $xy$  de la figura 28.4. O bien, en términos de vectores unitarios, se advierte que  $d\vec{l} = dl(-\hat{i})$ . En el punto  $P_1$ ,  $\hat{r} = \hat{j}$ , por tanto, en la ecuación (28.6),

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl(-\hat{i}) \times \hat{j} = dl(-\hat{k})$$

La dirección  $z$  negativa es *hacia* el plano.

La magnitud de  $\vec{B}$  se proporciona por medio de la ecuación (28.5). En el punto  $P_1$ , el ángulo entre  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  es de 90°; por tanto,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \phi}{r^2} \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(125 \text{ A})(1.0 \times 10^{-2} \text{ m})(\sin 90^\circ)}{(1.2 \text{ m})^2} \\ &= 8.7 \times 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$



**28.4** Buscando el campo magnético en dos puntos debido a un segmento de 1.0 cm de un alambre conductor de corriente (no se muestra a escala.)

b) En el punto  $P_2$  la dirección de  $\vec{B}$  es también hacia el plano  $xy$  de la figura. El ángulo entre  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  es de 30°, y

$$\begin{aligned} B &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(125 \text{ A})(1.0 \times 10^{-2} \text{ m})(\sin 30^\circ)}{(1.2 \text{ m})^2} \\ &= 4.3 \times 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Los resultados referentes a la dirección de  $\vec{B}$  se pueden comprobar comparándolos con la figura 28.3. El plano  $xy$  de la figura 28.4 corresponde al plano de color tabaco de la figura 28.3. Sin embargo, en este ejemplo la dirección de la corriente y, por tanto, de  $d\vec{l}$ , es la inversa de la dirección que se muestra en la figura 28.3, por lo que también se invierte la dirección del campo magnético. Por consiguiente, el campo en los puntos del plano  $xy$  de la figura 28.4 debe apuntar *hacia* ese plano, no hacia afuera de él. Ésta es la conclusión a la que habíamos llegado.

Dése cuenta que estas magnitudes de campo magnético son muy pequeñas; en comparación, el campo magnético de la Tierra es del orden de  $10^{-4}$  T. Observe también que los valores no son los campos *totales* en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , sino sólo las contribuciones del segmento corto de conductor que hemos descrito.

### Evalúe su comprensión

En la figura 28.4, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético generado por el segmento de 1.0 cm en un punto situado a 0.60 m directamente abajo

de él (es decir, en el eje  $y$  negativo)? ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética que el segmento ejerce sobre un protón que se halla en ese punto y se desplaza a  $4.0 \times 10^3$  m/s en la dirección  $y$  positiva?

### 28.3 | Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

Una aplicación importante de la ley de Biot y Savart es la determinación del campo magnético que produce un conductor recto portador de corriente. Este resultado es útil porque hay alambres conductores en prácticamente todos los dispositivos eléctricos y electrónicos. La figura 28.5 muestra un conductor de este tipo, de longitud  $2a$  y que transporta una corriente  $I$ . Hallaremos  $\vec{B}$  en un punto situado a una distancia  $x$  del conductor sobre su bisectriz perpendicular.

Primero se aplica la ley de Biot y Savart [ecuación (28.5)] para encontrar el campo  $d\vec{B}$  generado por el elemento de conductor de longitud  $dl = dy$  que se muestra en la figura 28.5. De acuerdo con la figura,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\sin \phi = \sin(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ . La regla de la mano derecha correspondiente al producto vectorial  $d\vec{l} \times \hat{r}$  indica que la dirección de  $d\vec{B}$  es hacia el plano de la figura y perpendicular al plano; además, las direcciones de los  $d\vec{B}$  generados por todos los elementos del conductor son las mismas. De esta manera, al integrar la ecuación (28.7) podemos simplemente sumar las magnitudes de los  $d\vec{B}$ , lo que representa una simplificación importante.

Combinando todo lo anterior, hallamos que la magnitud del campo total  $\vec{B}$  es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x \, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos integrar esto por sustitución trigonométrica o con ayuda de una tabla de integrales. El resultado final es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (28.8)$$

Cuando la longitud  $2a$  del conductor es muy grande en comparación con su distancia  $x$  respecto al punto  $P$ , se puede considerar como infinitamente largo. Cuando  $a$  es mucho mayor que  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + a^2}$  es aproximadamente igual a  $a$ ; por tanto, en el límite  $a \rightarrow \infty$  la ecuación (28.8) se convierte en

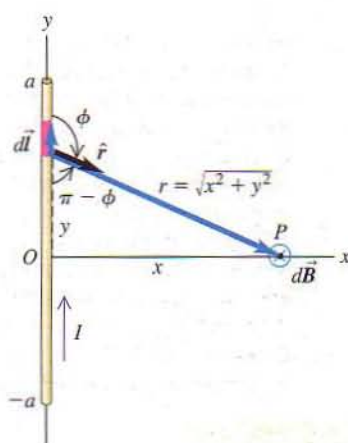
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

La situación física tiene simetría axial en torno al eje  $y$ . Por tanto,  $\vec{B}$  debe tener la misma magnitud en todos los puntos de un círculo centrado en el conductor y que yace en un plano perpendicular a él, y la dirección de  $\vec{B}$  debe ser tangente a todo ese círculo. Por consiguiente, en todos los puntos de un círculo de radio  $r$  alrededor del conductor, la magnitud  $B$  es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{conductor largo y recto portador de corriente}) \quad (28.9)$$

En la figura 28.6 se muestra parte del campo magnético en torno a un conductor largo y recto que transporta corriente.

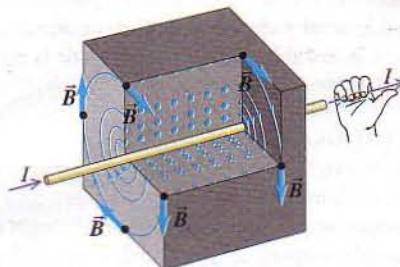
La geometría de este problema es similar a la del ejemplo 21.11 (sección 21.5), en el que se resolvió el problema del campo eléctrico generado por una recta infinita de carga. En ambos problemas aparece la misma integral y las magnitudes de campo son proporcionales a  $1/r$ . Pero las líneas de  $\vec{B}$  en el problema magnético tienen formas totalmente distintas en comparación con las líneas de  $\vec{E}$  en el problema



28.5 Campo magnético generado por un conductor recto portador de corriente de longitud  $2a$ . En el punto  $P$ ,  $\vec{B}$  se dirige hacia el plano de la página.

Activ  
ONLINE  
Physics

### 13.1 Campo magnético de un alambre



28.6 Campo magnético en torno a un conductor recto y largo que transporta corriente. Las líneas de campo son círculos y su dirección se determina mediante la regla de la mano derecha.



eléctrico análogo. Las líneas de campo eléctrico irradian hacia afuera desde una distribución lineal de carga positiva (hacia adentro en el caso de cargas negativas). En cambio, las líneas de campo magnético *circundan* la corriente que actúa como su fuente. Las líneas de campo eléctrico debidas a cargas comienzan y terminan en esas cargas; pero las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas y *nunca* tienen extremos, cualquiera que sea la forma del conductor portador de corriente que establece el campo. Como señalamos en la sección 27.3, esto es una consecuencia de la ley de Gauss del magnetismo, según la cual el flujo magnético total a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada}) \quad (28.10)$$

Esto implica que no existen cargas magnéticas aisladas ni monopolos magnéticos. Toda línea de campo magnético que entra en una superficie cerrada también debe salir de ella.

### Ejemplo 28.3

## Campo magnético de un solo alambre

Un conductor largo y recto transporta una corriente de 1.0 A. ¿A qué distancia del eje del conductor es la magnitud del campo magnético generado por la corriente igual a la del campo magnético terrestre en Pittsburgh (alrededor de  $0.5 \times 10^{-4}$  T)?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** La geometría es la misma que en la figura 28.6; por esto, se aplica la ecuación (28.8). Se conocen todas las cantidades de esta ecuación salvo la variable que se busca: la distancia  $r$ .

**EJECUTAR:** Se resuelve la ecuación (28.8) para  $r$  y se insertan los números apropiados:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mu_0 I}{2\pi B} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})(1.0 \text{ A})}{(2\pi)(0.5 \times 10^{-4} \text{ T})} = 4 \times 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Las corrientes de alrededor de un ampere son representativas de las que se encuentran en los alambres de los aparatos electrodomésticos. Este ejemplo muestra que los campos magnéticos creados por estos aparatos son muy débiles, incluso en puntos muy próximos al alambre. A distancias mayores el campo se debilita aún más; por ejemplo, a una distancia cinco veces mayor ( $r = 20 \text{ mm} = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ ) el campo es cinco veces más débil ( $B = 0.1 \times 10^{-4} \text{ T}$ ).

### Ejemplo 28.4

## Campo magnético de dos alambres

La figura 28.7a es una vista de los extremos de dos alambres rectos paralelos largos, perpendiculares al plano  $xy$ , cada uno de los cuales conduce una corriente  $I$ , pero en sentidos opuestos. a) Encuentre la magnitud y dirección de  $\vec{B}$  en los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . b) Proporcione la magnitud y dirección de  $\vec{B}$  en cualquier punto sobre el eje  $x$  a la derecha del alambre 2, en términos de la coordenada  $x$  del punto.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Se utiliza la ecuación (28.9) para hallar la magnitud de los campos  $\vec{B}_1$  (debido al alambre 1) y  $\vec{B}_2$  (debido al alambre 2) en cualquier punto. Las direcciones de estos campos se proporcionan mediante la regla de la mano derecha. En seguida se aplica el principio de superposición de campos magnéticos para encontrar el campo magnético *total* en el punto en cuestión:  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ .

**EJECUTAR:** a) El punto  $P_1$  está más próximo al alambre 1 (distancia:  $2d$ ) que al alambre 2 (distancia:  $4d$ ); así, en este punto la magnitud de campo  $B_1$  es mayor que la magnitud  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(4d)} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d}$$

La regla de la mano derecha indica que  $\vec{B}_1$  tiene la dirección y negativa, y  $\vec{B}_2$ , la dirección y positiva. Puesto que  $B_1$  es la magnitud más grande, el campo total  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  tiene la dirección y negativa, y su magnitud es

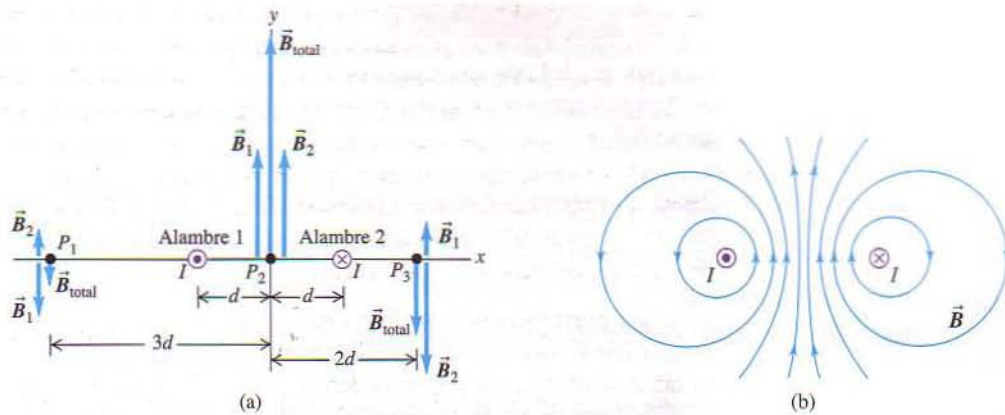
$$B_{\text{total}} = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} - \frac{\mu_0 I}{8\pi d} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d} \quad (\text{punto } P_1)$$

En el punto  $P_2$ , a una distancia  $d$  de ambos alambres,  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  tienen ambos la dirección y positiva y la misma magnitud:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

por lo que  $\vec{B}_{\text{total}}$  también tiene la dirección y positiva y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \quad (\text{punto } P_2)$$



**28.7** (a) Dos conductores rectos y largos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se observan desde sus extremos. (b) Mapa del campo magnético generado por los dos conductores. Las líneas de campo están más próximas unas de otras entre los conductores, donde el campo es más intenso.

Por último, en el punto  $P_3$  la regla de la mano derecha indica que  $\vec{B}_1$  tiene la dirección y positiva, y  $\vec{B}_2$ , la dirección y negativa. Este punto está más lejos del alambre 1 (distancia:  $3d$ ) que del alambre 2 (distancia  $d$ ); por tanto,  $B_1$  es menor que  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi d} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

El campo total tiene la dirección y negativa, la misma que  $\vec{B}_2$ , y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I}{6\pi d} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} \quad (\text{punto } P_3)$$

Usted deberá ser capaz de verificar por su cuenta las direcciones de  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  correspondientes a cada punto.

En la figura 28.7a se muestran los campos  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  y  $\vec{B}_{\text{total}}$ , en cada uno de los tres puntos. La misma técnica permite hallar  $\vec{B}_{\text{total}}$  en cualquier punto; en el caso de puntos alejados del eje  $x$ , se debe tener cuidado en la suma vectorial, porque  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  ya no necesitan ser simplemente paralelos o antiparalelos (véanse los problemas 28.56 y 28.57). La figura 28.7b muestra algunas de las líneas de campo magnético debidas a esta combinación de alambres.

b) En cualquier punto a la derecha del alambre 2 (esto es, cuando  $x > d$ ),  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  tienen las mismas direcciones que en  $P_3$ . A medida que  $x$  aumenta, la magnitud tanto de  $\vec{B}_1$  como de  $\vec{B}_2$  disminuye; por tanto, también  $\vec{B}_{\text{total}}$  debe disminuir. Las magnitudes de los campos debidos a cada alambre son:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)}$$

En cualquier punto de campo a la derecha del alambre 2, este último está más próximo que el alambre 1 y, por tanto,  $B_2 > B_1$ . Por consiguiente,  $\vec{B}_{\text{total}}$  tiene la dirección y negativa, la misma que  $\vec{B}_2$ , y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} = \frac{\mu_0 I d}{\pi(x^2 - d^2)}$$

donde se han combinado los dos términos mediante un denominador común.

**EVALUAR:** En los puntos muy alejados del alambre, de tal modo que  $x$  es mucho mayor que  $d$ , se puede pasar por alto el término  $d^2$  del denominador y

$$B_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I d}{\pi x^2}$$

La magnitud del campo magnético correspondiente a un solo alambre disminuye con la distancia en proporción a  $1/x$ , como lo indica la ecuación (28.9); en el caso de dos alambres que conducen corrientes opuestas,  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  se cancelan parcialmente uno al otro y, por tanto, la magnitud de  $\vec{B}_{\text{total}}$  disminuye con más rapidez, en proporción a  $1/x^2$ . Este efecto se utiliza en sistemas de comunicación tales como redes telefónicas o de computadoras. El cableado se dispone de modo que un conductor que transporta una señal en un sentido y el conductor que transporta la señal de regreso estén uno al lado del otro, como en la figura 28.7a, o retorcidos uno en torno al otro (Fig. 28.8). El resultado de esto es que el campo magnético generado por estas señales externas a los conductores se reduce considerablemente y es menos probable que ejerza fuerzas indeseables sobre otras corrientes portadoras de información.



**28.8** Los cables de computadora, o los cables de aparatos de audio y vídeo, generan poco o ningún campo magnético. Esto se debe a que, en el interior de cada cable, alambres muy próximos unos de otros conducen corriente en ambos sentidos a lo largo del cable. Los campos magnéticos de estas corrientes opuestas se cancelan mutuamente.

### Evalúe su comprensión

Suponga que los dos conductores de la figura 28.7 transportan corrientes idénticas  $I$  en la dirección hacia afuera del plano. ¿Cuál sería el campo magnético en el punto  $P_2$ ?

## 28.4 | Fuerza entre conductores paralelos

En el ejemplo 28.4 (sección 28.3) mostramos cómo aplicar el principio de superposición de campos magnéticos para hallar el campo total debido a dos conductores largos portadores de corriente. Otro aspecto importante de esta configuración es la *fuerza de interacción* entre los conductores. Esta fuerza desempeña un papel en muchas situaciones prácticas donde existen alambres portadores de corriente próximos unos a otros, y también tiene una importancia fundamental en relación con la definición del amperio. La figura 28.9 muestra segmentos de dos conductores rectos paralelos largos, separados por una distancia  $r$  y que transportan las corrientes  $I$  e  $I'$ , respectivamente, en el mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético establecido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza. El diagrama muestra algunas de las líneas de campo que establece la corriente del conductor inferior.

De acuerdo con la ecuación (28.9), el conductor de abajo genera un campo  $\vec{B}$  cuya magnitud es, en la posición del conductor de arriba,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

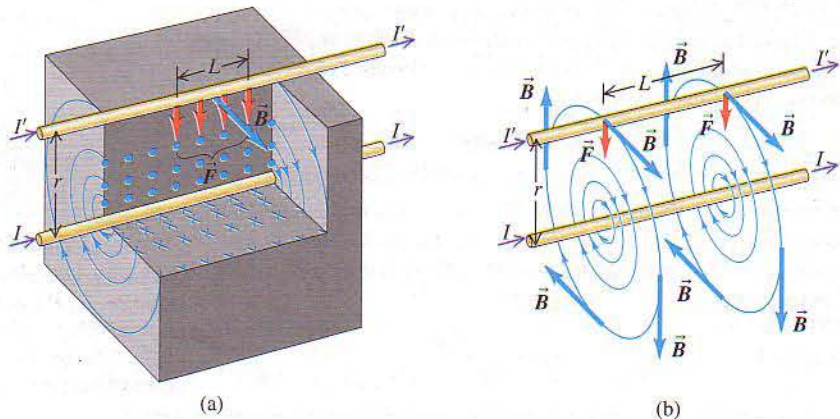
De acuerdo con la ecuación (27.19), la fuerza que este campo ejerce sobre un tramo de longitud  $L$  del conductor superior es  $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$ , donde el vector  $\vec{L}$  tiene la dirección de la corriente  $I'$  y su magnitud es  $L$ . Puesto que  $\vec{B}$  es perpendicular a la longitud del conductor y, por tanto, a  $\vec{L}$ , la magnitud de esta fuerza es

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

y la fuerza *por unidad de longitud*  $F/L$  es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad (\text{dos conductores paralelos largos portadores de corriente}) \quad (28.11)$$

La aplicación de la regla de la mano derecha a  $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$  indica que la fuerza sobre el conductor de arriba está dirigida *hacia abajo*.



**28.9** Los conductores paralelos que transportan corrientes en un mismo sentido se atraen mutuamente. El diagrama muestra cómo ejerce una fuerza  $\vec{F}$  sobre el conductor de arriba el campo magnético  $\vec{B}$  generado por el conductor de abajo.

La corriente del conductor superior también establece un campo en la posición del conductor de abajo. Dos aplicaciones sucesivas de la regla de la mano derecha para productos vectoriales (una para hallar la dirección del campo  $\vec{B}$  debida al conductor de arriba, como en la sección 28.2, y una más para hallar la dirección de la fuerza que este campo ejerce sobre el conductor de abajo, como en la sección 27.6) indican que la fuerza sobre el conductor inferior es *hacia arriba*. Así pues, *dos conductores paralelos que trasportan corriente en el mismo sentido se atraen mutuamente*. Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invierten. *Los conductores paralelos que trasportan corrientes en sentidos opuestos se repelen mutuamente*.

La atracción o repulsión entre dos conductores rectos paralelos que transportan corriente es la base de la definición oficial del **ampere**:

**Un ampere es la corriente invariable que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro en el espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente  $2 \times 10^{-7}$  newton por metro de longitud.**

De acuerdo con la ecuación (28.11), podemos ver que esta definición del ampere es la que nos lleva a asignar a  $\mu_0$  el valor de  $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ . Además, constituye la base de la definición SI del coulomb, que es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un ampere.

Ésta es una *definición funcional*; proporciona un procedimiento experimental concreto para medir corriente y definir una unidad de corriente. En principio, se podría utilizar esta definición para calibrar un amperímetro, empleando sólo una regla de medir y una balanza de resortes. Para la estandarización muy precisa del ampere se utilizan bobinas de alambre en vez de alambres rectos y su separación es de sólo unos pocos centímetros. El instrumento completo, que es capaz de medir corrientes con un alto grado de precisión, se conoce como *balanza de corriente*.

Existen fuerzas de atracción no sólo entre *alambres* que transportan corrientes en el mismo sentido, sino además entre los segmentos longitudinales de un conductor individual portador de corriente. Si el conductor es un líquido o un gas ionizado (un plasma), estas fuerzas provocan una contracción del conductor, como si en su superficie actuase una presión hacia adentro. La contracción del conductor se conoce como *restricción*. La alta temperatura que la restricción produce en un plasma se ha utilizado en una técnica para lograr la fusión nuclear.

### Ejemplo 28.5

## Fuerzas entre alambres paralelos

Dos alambres superconductores paralelos rectos, separados 4.5 mm, transportan corrientes iguales de 15 000 A en sentidos opuestos. ¿Nos debe preocupar la resistencia mecánica de estos alambres?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El que nos deba preocupar la resistencia mecánica de los alambres depende de cuánta fuerza magnética ejerce cada alambre sobre el otro.

**PLANTEAR:** La variable que se busca es la fuerza magnética por unidad de longitud del alambre, la cual se halla mediante la ecuación (28.11).

**EJECUTAR:** Debido a que las corrientes tienen sentidos opuestos, los dos conductores se repelen mutuamente. De acuerdo con la ecuación (28.11), la fuerza por unidad de longitud es

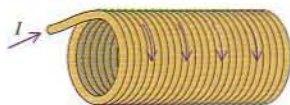
$$\begin{aligned} \frac{F}{L} &= \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(15,000 \text{ A})^2}{(2\pi)(4.5 \times 10^{-3} \text{ m})} \\ &= 1.0 \times 10^4 \text{ N/m} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Se trata de una fuerza grande, de aproximadamente una tonelada por metro; por tanto, la resistencia mecánica de los conductores y de los materiales aislantes debe ser sin duda una consideración importante. Corrientes y separaciones de esta magnitud se utilizan en los electroimanes superconductores de los aceleradores de partículas, y el análisis de los esfuerzos mecánicos es una parte crucial del procedimiento de diseño.

Ejemplo  
conceptual 28.6

## Esfuerzo mecánico en un solenoide

El *solenoid*, presentado en la sección 27.7, es un alambre enrollado en forma de bobina helicoidal. Con respecto a un solenoide que conduce una corriente  $I$  (Fig. 28.10), analice las direcciones de las fuerzas magnéticas a) entre espiras adyacentes de la bobina; b) entre lados opuestos de una misma espira.



28.10 Solenoide portador de corriente.

## SOLUCIÓN

a) Las espiras adyacentes conducen corrientes paralelas y, por consiguiente, se atraen entre sí, lo cual provoca un esfuerzo de *compresión* a lo largo del eje del solenoide.

b) Los lados opuestos de una misma espira conducen corriente en sentidos opuestos y, por tanto, se repelen mutuamente. En consecuencia, la bobina experimenta fuerzas que jalan radialmente hacia afuera y crean un esfuerzo de *tensión* en los conductores. Estas fuerzas son proporcionales al cuadrado de la corriente; como ya señalamos, constituyen una consideración importante en el diseño de electroimanes. En la sección 28.7 examinaremos la naturaleza del campo magnético *total* producido por un solenoide.

## Evalúe su comprensión

Un cable como los que se muestran en la figura 28.8 tiene dos alambres separados 4 mm, cada uno de los cuales conduce una corriente de 1 A en sentidos opuestos. ¿Es de atracción o de repulsión la fuerza magnética entre los alambres? ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de los alambres? ¿Es apreciable esta fuerza en el uso normal?



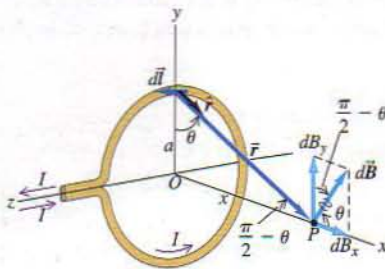
28.11 Este electroimán contiene una bobina conductora de corriente con muchas espiras de alambre. El campo magnético resultante es tan intenso que el electroimán puede alzar cientos de latas de acero a la vez.

28.12 Campo magnético de una espira circular. La corriente del segmento  $d\vec{l}$  genera el campo  $d\vec{B}$ , que yace en el plano  $xy$ . Las corrientes de los otros  $d\vec{l}$  generan  $d\vec{B}$  con diferentes componentes perpendiculares al eje de las  $x$ ; la suma de estas componentes es cero. Las componentes  $x$  de los  $d\vec{B}$  se combinan para dar el campo total  $\vec{B}$  en el punto  $P$ .

## 28.5 | Campo magnético de una espira circular de corriente

Si examinamos el interior de un timbre, un transformador, un motor eléctrico o un electroimán (Fig. 28.11), hallaremos bobinas de alambre con un gran número de espiras, con una separación tan pequeña entre cada espira que cada una de ellas es prácticamente una espira circular plana. Se utiliza una corriente para establecer un campo magnético en las bobinas de este tipo. Por consiguiente, vale la pena deducir una expresión del campo magnético generado por una sola espira circular conductora que transporta una corriente, o por  $N$  espiras circulares muy próximas entre sí que forman una bobina. En la sección 27.7 consideramos la fuerza y el momento de torsión sobre una espira de corriente de este tipo colocado en un campo magnético externo generado por otras corrientes; ahora nos proponemos hallar el campo magnético generado por la espira misma.

La figura 28.12 muestra un conductor circular de radio  $a$  que transporta una corriente  $I$ . La corriente entra y sale de la espira por conducto de dos alambres rectos y largos que están uno al lado del otro; las corrientes de estos alambres rectos fluyen en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos se cancelan casi totalmente uno al otro (véase el ejemplo 28.4 de la sección 28.3).



Mediante la ley de Biot y Savart [ecuación (28.5) o ecuación (28.6)] se puede hallar el campo magnético en un punto  $P$  sobre el eje de la espira, a una distancia  $x$  del centro. Como se ve en la figura,  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  son perpendiculares y la dirección del campo  $d\vec{B}$  generado por este elemento  $d\vec{l}$  en particular yace en el plano  $xy$ . Puesto que  $r^2 = x^2 + a^2$ , la magnitud  $dB$  del campo debido al elemento  $d\vec{l}$  es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \quad (28.12)$$

Las componentes del vector  $d\vec{B}$  son

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad (28.13)$$

$$dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad (28.14)$$

La situación presenta simetría de rotación en torno al eje  $x$ , por lo que no puede haber una componente del campo total  $\vec{B}$  perpendicular a este eje. Por cada elemento  $d\vec{l}$  hay un elemento correspondiente en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta. Estos dos elementos hacen contribuciones iguales a la componente  $x$  de  $d\vec{B}$ , dada por la ecuación (28.13), pero dan componentes *opuestas* perpendiculares al eje  $x$ . Por consiguiente, todas las componentes perpendiculares se cancelan y sólo sobreviven las componentes  $x$ .

Para obtener la componente  $x$  del campo total  $\vec{B}$ , se integra la ecuación (28.13), incluyendo todos los  $d\vec{l}$  alrededor de la espira. Salvo  $dl$ , todo en esta expresión es constante y se puede sacar de la integral, y entonces se tiene

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

La integral de  $dl$  es simplemente la circunferencia del círculo,  $\int dl = 2\pi a$ , y finalmente se obtiene

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{sobre el eje de una espira circular}) \quad (28.15)$$

Supóngase ahora que en vez de la simple espira de la figura 28.12 se tiene una bobina compuesta de  $N$  espiras, todos con el mismo radio. La separación entre las espiras es muy pequeña, de modo que el plano de cada espira está prácticamente a la misma distancia  $x$  del punto de campo  $P$ . Cada espira contribuye en igual medida al campo y el campo total es  $N$  veces el campo de una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{sobre el eje de } N \text{ espiras circulares}) \quad (28.16)$$

El factor  $N$  de la ecuación (28.16) es la razón por la que se utilizan bobinas de alambre, y no espiras individuales, para generar campos magnéticos intensos; para obtener cierta intensidad de campo deseada, el uso de una sola espira podría requerir una corriente  $I$  tan grande que excedería la capacidad nominal del alambre de la espira.

La figura 28.13 muestra una gráfica de  $B_x$  en función de  $x$ . El valor máximo del campo está en  $x = 0$ , el centro de la espira o bobina:

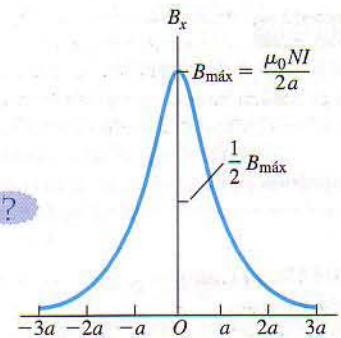
$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (\text{en el centro de } N \text{ espiras circulares}) \quad (28.17)$$

Al avanzar hacia afuera a lo largo del eje, la magnitud del campo disminuye.

En la sección 27.7 definimos el *momento dipolar magnético* (o *momento dipolar*) de una espira portadora de corriente igual a  $IA$ , donde  $A$  es el área de sección



### 13.2 Campo magnético de una espira



**28.13** Gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con  $N$  espiras. Cuando  $x$  es mucho mayor que  $a$ , la magnitud del campo disminuye aproximadamente con  $1/x^3$ .

transversal de la espira. Si hay  $N$  espiras, el momento magnético total es  $NIA$ . La espira circular de la figura 28.12 tiene un área  $A = \pi a^2$ , por lo que el momento magnético de una sola espira es  $\mu = I\pi a^2$ ; con  $N$  espiras,  $\mu = NI\pi a^2$ . Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (28.15) y (28.16), se encuentra que estas dos expresiones se pueden escribir como

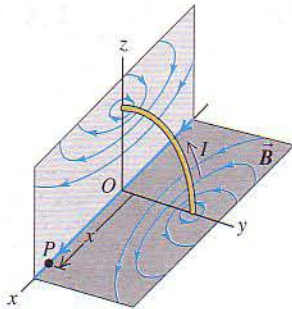
$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (28.18)$$

(sobre el eje de cualquier número de espiras circulares)

En la sección 27.7 describimos un dipolo magnético en términos de su respuesta a un campo magnético generado por corrientes externas al dipolo. Pero un dipolo magnético también es una *fente* de campo magnético; la ecuación (28.18) describe el campo magnético *producido* por un dipolo magnético con respecto a puntos a lo largo del eje del dipolo. Este campo es directamente proporcional al momento dipolar magnético  $\mu$ . Dése cuenta que el campo a lo largo del eje  $x$  tiene la misma dirección que el momento magnético vectorial  $\vec{\mu}$ ; esto es válido sobre el eje  $x$  tanto positivo como negativo.

**CUIDADO** Las ecuaciones (28.15), (28.16) y (28.18) son válidas sólo sobre el eje de una espira o bobina. ¡No intente aplicar estas ecuaciones en otros puntos!

En la figura 28.14 se muestran algunas de las líneas de campo magnético que rodean a una espira circular de corriente (dipolo magnético), en planos que pasan por el eje. Las direcciones de las líneas de campo están dadas por la misma regla de la mano derecha que se aplica a un conductor recto largo. Sujete el conductor con la mano derecha, con el pulgar en la dirección de la corriente; sus dedos se doblan en la misma dirección que las líneas de campo. Las líneas de campo correspondientes a la espira circular de corriente son curvas cerradas que circundan el conductor; sin embargo, *no* son círculos.



**28.14** Líneas de campo magnético generadas por la corriente de una espira circular. En los puntos sobre el eje el campo  $\vec{B}$  tiene la dirección del momento magnético de la espira.

### Ejemplo 28.7

## Campo magnético de una bobina

Una bobina compuesta de 100 espiras circulares de 0.60 m de radio conduce una corriente de 5.0 A. a) Encuentre el campo magnético en un punto a lo largo del eje de la bobina, a 0.80 m del centro. b) A lo largo del eje, ¿a qué distancia del centro es la magnitud del campo 1/8 de la que existe en el centro?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Se desea conocer el campo sobre el eje de la bobina, no necesariamente en su centro; por tanto, se usa la ecuación (28.16). Los datos que se tienen son  $N = 100$ ,  $I = 5.0$  A y  $a = 0.60$  m. En el inciso (a) la variable que se busca es el campo magnético en un valor dado de la coordenada  $x$ ; en el inciso (b), la variable que se busca es el valor de  $x$  en el que el campo tiene 1/8 de la magnitud que alcanza en  $x = 0$ .

**EJECUTAR:** a) Con  $x = 0.80$  m, y de acuerdo con la ecuación (28.16), se tiene

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(100)(5.0 \text{ A})(0.60 \text{ m})^2}{2[(0.80 \text{ m})^2 + (0.60 \text{ m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4} \text{ T}$$

b) Considerando la ecuación (28.16), se desea hallar un valor de  $x$  tal que

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8} \frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para resolver esto en favor de  $x$ , se obtiene el recíproco de todo y luego se elevan ambos lados a una potencia de 2/3; el resultado es

$$x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1.04 \text{ m}$$

A una distancia de aproximadamente 1.7 radios del centro, el campo ha decaído a 1/8 de su valor en el centro.

**EVALUAR:** La respuesta al inciso (a) se comprueba hallando primero el momento magnético, para luego sustituir el resultado en la ecuación (28.18):

$$\mu = NI\pi a^2 = (100)(5.0 \text{ A})\pi(0.60 \text{ m})^2 = 5.7 \times 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(5.7 \times 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^2)}{2\pi[(0.80 \text{ m})^2 + (0.60 \text{ m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4} \text{ T}$$

El momento magnético  $\mu$  es relativamente grande; sin embargo se trata de un campo más bien pequeño, comparable en términos de magnitud con el campo magnético terrestre. Este ejemplo da una idea de lo difícil que es crear un campo de 1 T o más.

**Evalúe su comprensión**

Las ecuaciones (28.13) y (28.14) proporcionan las componentes del campo magnético  $d\vec{B}$  generado en el punto  $P$  por un segmento  $d\vec{l}$  que yace sobre el eje  $y$  positivo de la figura 28.12 (en la parte superior de la espira). La componente  $z$  de este  $d\vec{B}$  es cero. ¿Cuáles son las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del campo  $d\vec{B}$  generado en  $P$  por un segmento  $d\vec{l}$  sobre el eje  $y$  negativo? ¿Y sobre el eje  $z$  negativo?

**28.6 | Ley de Ampere**

Hasta aquí nuestros cálculos del campo magnético debido a una corriente han implicado hallar el campo infinitesimal  $d\vec{B}$  debido a un elemento de corriente, y luego sumar todos los  $d\vec{B}$  para encontrar el campo total. Este planteamiento es directamente análogo a nuestros cálculos de campo eléctrico del capítulo 21.

En el caso de problema del campo eléctrico, hallamos que en las situaciones con una distribución de carga altamente simétrica suele ser más fácil aplicar la ley de Gauss para proporcionar  $\vec{E}$ . De igual manera existe una ley que nos permite hallar con más facilidad los campos magnéticos generados por distribuciones de corriente con un alto grado de simetría. Pero la ley que permite hacer esto, llamada *ley de Ampere*, difiere considerablemente de la ley de Gauss en cuanto a su carácter.

La ley de Gauss de los campos eléctricos implica el flujo de  $\vec{E}$  a través de una superficie cerrada; establece que este flujo es igual al cociente de la carga total encerrada dentro de la superficie entre la constante  $\epsilon_0$ . Así pues, esta ley relaciona campos eléctricos con distribuciones de carga. En cambio, la ley de Gauss de los campos magnéticos [ecuación (28.10)] no es una relación entre campos magnéticos y distribuciones de corriente; establece que el flujo de  $\vec{B}$  a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero, ya sea que haya o no corrientes dentro de la superficie. Por tanto, la ley de Gauss referente a  $\vec{B}$  no sirve para hallar el campo magnético generado por una distribución de corriente en particular.

La ley de Ampere no se formula en términos de flujo magnético, sino más bien en términos de la integral de línea de  $\vec{B}$  alrededor de un trayecto cerrado, que se denota con

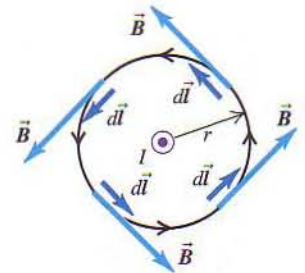
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Utilizamos integrales de línea para definir el trabajo en el capítulo 6 y para calcular el potencial eléctrico en el capítulo 23. Para evaluar esta integral, se divide el trayecto en segmentos infinitesimales  $d\vec{l}$ , se calcula el producto escalar de  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  correspondiente a cada segmento y se suman estos productos. En general,  $\vec{B}$  varía de un punto a otro, y se debe emplear el valor de  $\vec{B}$  en la ubicación de cada  $d\vec{l}$ . Otra notación es  $\oint B_{\parallel} dl$ , donde  $B_{\parallel}$  es la componente de  $\vec{B}$  paralela a  $d\vec{l}$  en cada punto. El círculo sobre el signo de integral indica que esta integral siempre se calcula con respecto a un trayecto cerrado, esto es, uno cuyos puntos inicial y final son iguales.

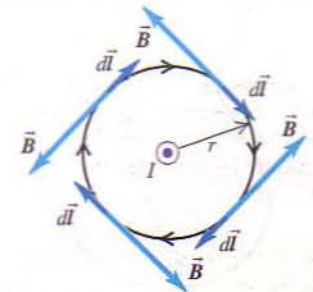
A fin de presentar la idea básica de la ley de Ampere, considérese una vez más el campo magnético generado por un conductor recto y largo que transporta una corriente  $I$ . En la sección 28.3 se encontró que la magnitud del campo a una distancia  $r$  del conductor es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

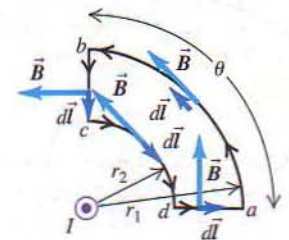
y que las líneas de campo magnético son círculos centrados en el conductor. Obtenemos la integral de línea de  $\vec{B}$  alrededor de uno de estos círculos de radio  $r$ , como en la figura 28.15a. En todos los puntos del círculo  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos y, por tanto,  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ ; puesto que  $r$  es constante alrededor del círculo,  $B$  tam-



(a) El trayecto de integración es un círculo centrado en el conductor; la integración recorre el círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj.



(b) Mismo trayecto de integración que en (a), pero la integración recorre el círculo en el sentido de las manecillas del reloj.



(c) Trayecto de integración que no encierra el conductor.

**28.15** Algunos trayectos de integración para la integral de línea de  $\vec{B}$  en las cercanías de un conductor recto y largo que transporta la corriente  $I$  hacia afuera del plano de la página (como lo indica el círculo con un punto). El conductor se ve desde un extremo.



bién es constante. También se puede decir que  $B_{\parallel}$  es constante e igual a  $B$  en todos los puntos del círculo. Por consiguiente, podemos sacar a  $B$  de la integral. La integral restante  $\oint dl$  es simplemente la circunferencia del círculo; por tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel} dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

Por esto, la integral de línea es independiente del radio del círculo y es igual al producto de  $\mu_0$  por la corriente que pasa a través del área limitada por el círculo.

En la figura 28.15b la situación es la misma, pero ahora el trayecto de integración es alrededor del círculo en sentido opuesto. Ahora  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son antiparalelos; por tanto,  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B dl$  y la integral de línea es igual a  $-\mu_0 I$ . Se obtiene el mismo resultado si el trayecto de integración es el mismo que en la figura 28.15a, pero la dirección de la corriente se invierte. Por consiguiente, la integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $\mu_0$  multiplicado por la corriente que pasa a través del área limitada por el trayecto de integración, con signo positivo o negativo según la dirección de la corriente respecto a la dirección de integración.

Existe una regla simple para hallar el signo de la corriente; no le sorprenderá saber que se basa en la mano derecha. Doble los dedos de su mano derecha en torno al trayecto de integración de modo que se doblen en la dirección de integración (esto es, la dirección que se emplea para evaluar  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ). En estas condiciones el pulgar derecho indica la dirección de la corriente positiva. Las corrientes que pasan en esta dirección son positivas; las que lo hacen en dirección opuesta son negativas. Con base en esta regla, usted podrá confirmar por su cuenta que la corriente es positiva en la figura 28.15a y negativa en la figura 28.15b. Otra manera de expresar esto mismo es la siguiente: mirando hacia la superficie limitada por el trayecto de integración, integre en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del trayecto, como en la figura 28.15a. Las corrientes que vienen hacia usted a través de la superficie son positivas, y las que se alejan de usted son negativas.

En la figura 28.15c se utiliza un trayecto de integración que *no* encierra al conductor. A lo largo del arco circular  $ab$  de radio  $r_1$ ,  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos, y  $B_{\parallel} = B_1 = \mu_0 I / 2\pi r_1$ ; a lo largo del arco circular  $cd$  de radio  $r_2$ ,  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son antiparalelos, y  $B_{\parallel} = -B_2 = -\mu_0 I / 2\pi r_2$ . El campo  $\vec{B}$  es perpendicular a  $d\vec{l}$  en todos los puntos sobre las secciones rectas  $bc$  y  $da$ ; por tanto,  $B_{\parallel} = 0$  y estas secciones contribuyen cero a la integral de línea. En estos términos la integral de línea total es

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint B_{\parallel} dl = B_1 \int_a^b dl + (0) \int_b^c dl + (-B_2) \int_c^d dl + (0) \int_d^a dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (r_1 \theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (r_2 \theta) + 0 = 0 \end{aligned}$$

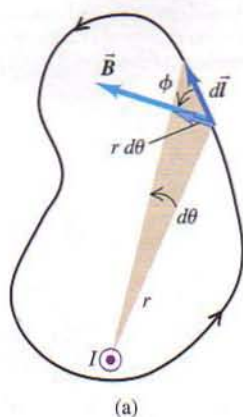
La magnitud de  $\vec{B}$  es mayor en el arco  $cd$  que en el arco  $ab$ , pero la longitud de arco es menor, por lo que las contribuciones de los dos arcos se cancelan exactamente. No obstante que hay un campo magnético en toda la extensión del trayecto de integración, la integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es cero si no pasa corriente a través del área limitada por el trayecto.

Podemos deducir también estos resultados con respecto a trayectos de integración más generales, como el de la figura 28.16a, por ejemplo. En la posición del elemento de línea  $d\vec{l}$ , el ángulo entre  $d\vec{l}$  y  $\vec{B}$  es  $\phi$  y

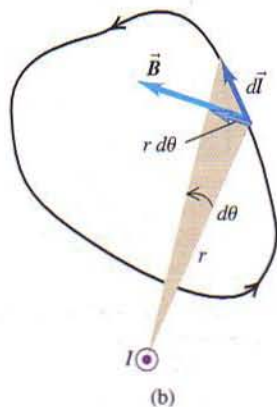
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \phi$$

De acuerdo con la figura,  $dl \cos \phi = r d\theta$ , donde  $d\theta$  es el ángulo que subtiende  $d\vec{l}$  en la posición del conductor y  $r$  es la distancia de  $d\vec{l}$  desde el conductor. Por tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$



(a)



(b)

**28.16** (a) Trayecto de integración más general para la integral de línea de  $\vec{B}$  alrededor de un conductor recto y largo que transporta la corriente  $I$  hacia afuera del plano de la página. El conductor se ve desde un extremo. (b) Trayecto de integración más general que no encierra el conductor.

Pero  $\oint d\theta$  es simplemente igual a  $2\pi$ , el ángulo total barrido por la línea radial desde el conductor a  $d\vec{l}$  durante un recorrido total del trayecto. Por lo que se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (28.19)$$

Este resultado no depende de la forma del trayecto ni de la posición del alambre en su interior. Si la corriente en el alambre es opuesta a la que se muestra, la integral es de signo contrario. Pero si el trayecto no encierra el alambre (Fig. 28.16b), entonces el cambio neto de  $\theta$  durante el recorrido del trayecto de integración es cero;  $\oint d\theta$  es cero en vez de  $2\pi$  y la integral de línea es cero.

La ecuación (28.19) es casi, aunque no cabalmente, el enunciado general de la ley de Ampere. Para generalizarla aún más, suponga que *varios* conductores rectos y largos atraviesan la superficie limitada por el trayecto de integración. El campo magnético total  $\vec{B}$  en cualquier punto del trayecto es la suma vectorial de los campos producidos por los conductores individuales. Por tanto, la integral de línea del  $\vec{B}$  total es igual a  $\mu_0$  por la *suma algebraica* de las corrientes. Al calcular esta suma se aplica la regla de signos para corrientes antes descrita. Si el trayecto de integración no encierra un alambre en particular, la integral de línea del campo  $\vec{B}$  de ese alambre es cero, porque el ángulo  $\theta$  correspondiente a ese alambre barre un cambio neto de cero en vez de  $2\pi$  durante la integración. Todo conductor presente que no esté encerrado por un trayecto en particular puede no obstante contribuir al valor de  $\vec{B}$  en todos los puntos, pero las *integrales de línea* de sus campos alrededor del trayecto son cero.

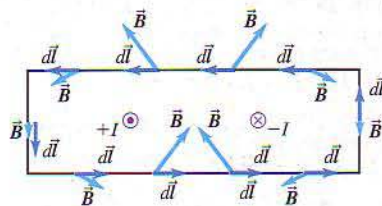
De este modo se puede sustituir  $I$  en la ecuación (28.19) por  $I_{\text{enc}}$ , la suma algebraica de las corrientes *encerradas* o *enlazadas* por el trayecto de integración, con la suma evaluada con base en la regla de signos ya descrita. Por lo tanto nuestro enunciado de la **ley de Ampere** es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (\text{ley de Ampere}) \quad (28.20)$$

Aunque hemos deducido la ley de Ampere sólo con respecto al caso especial del campo de varios conductores rectos paralelos largos, la ecuación (28.20) es de hecho válida con respecto a conductores y trayectos de *cualquier* forma. La deducción general no difiere en principio de la que hemos presentado, pero la geometría es más complicada.

Si  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , ello *no* significa necesariamente que  $\vec{B} = \mathbf{0}$  a todo lo largo del trayecto, sino sólo que la corriente total a través de un área limitada por el trayecto es cero. En las figuras 28.15c y 28.16b, los trayectos de integración no encierran ninguna corriente; en la figura 28.17 hay corrientes positivas y negativas de igual magnitud a través del área encerrada por el trayecto. En ambos casos,  $I_{\text{enc}} = 0$  y la integral de línea es cero.

**CUIDADO** En el capítulo 23 vimos que la integral de línea del campo eléctrico  $\vec{E}$  alrededor de cualquier trayecto cerrado es igual a cero; esto equivale a afirmar que la fuerza electrostática  $\vec{F} = q\vec{E}$  sobre una carga puntual  $q$  es conservativa, por lo que esta fuerza realiza un trabajo nulo sobre una carga que se traslada al-



**28.17** Dos conductores rectos y largos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se ven desde los extremos, y el trayecto de integración es en sentido contrario a las manecillas del reloj. La integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  recibe una contribución nula de los segmentos superior e inferior, una contribución positiva del segmento izquierdo y una contribución negativa del segmento derecho; la integral neta es cero.

rededor de un trayecto cerrado que regresa al punto de partida. Se podría pensar que el valor de la integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  guarda una relación análoga con la cuestión de si la fuerza magnética es conservativa. No es éste el caso en absoluto. Recuerde que la fuerza magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  sobre una partícula con carga en movimiento siempre es perpendicular a  $\vec{B}$ , por lo que  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  no guarda relación con el trabajo realizado por la fuerza magnética; como se establece en la ley de Ampere, esta integral está relacionada sólo con la corriente total a través de una superficie limitada por el trayecto de integración. De hecho, la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento *no* es conservativa. Una fuerza conservativa depende únicamente de la posición del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza, pero la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento también depende de la *velocidad* de la partícula.

En la forma en que la hemos enunciado, la ley de Ampere resulta ser válida sólo si las corrientes son estables y no están presentes ni materiales magnéticos ni campos eléctricos que varíen con el tiempo. En el capítulo 29 veremos cómo se generaliza la ley de Ampere con respecto a campos que varían con el tiempo.

### Evalúe su comprensión

En la sección 27.3 vimos que todas las líneas de campo magnético forman espiras cerradas. Con base en la ley de Ampere, explique por qué toda espira cerrada de este tipo debe encerrar una corriente. Luego de examinar la figura 27.11a, explique por qué un imán de barra debe tener corrientes en su interior.

## 28.7 | Aplicaciones de la ley de Ampere

La ley de Ampere resulta útil cuando se puede explotar la simetría de una situación para evaluar la integral de línea de  $\vec{B}$ . A continuación se exponen varios ejemplos. La siguiente estrategia para resolver problemas es directamente análoga a la estrategia que se sugiere en la sección 22.4 para aplicaciones de la ley de Gauss; le sugerimos repasar ahora esa estrategia y comparar los dos métodos.

Estrategia para  
resolver problemas

### Ley de Ampere

**IDENTIFICAR** los conceptos pertinentes: Al igual que la ley de Gauss de la electricidad, la ley de Ampere es válida en todos los casos, pero resulta de mayor utilidad en situaciones donde el modelo de campo magnético presenta un alto grado de simetría. En tales situaciones la ley de Ampere permite hallar una relación entre el campo magnético en función de la posición y la corriente que genera el campo.

**PLANTEAR** el problema utilizando las etapas siguientes:

1. Elija el trayecto de integración que utilizará con la ley de Ampere. Si desea hallar el campo magnético en un punto determinado, entonces el trayecto debe pasar por ese punto. No es necesario que el trayecto de integración sea alguna frontera física real. Por lo regular es una curva puramente geométrica; puede ser espacio vacío, estar inmersa en un cuerpo sólido, o un poco de ambas cosas. El trayecto de in-

tegración debe tener la *simetría* suficiente para hacer posible la evaluación de la integral. Si el problema en sí tiene simetría cilíndrica, habitualmente el trayecto de integración será un círculo coaxial con el eje del cilindro.

2. Encuentre la variable o variables que se sugieren. Por lo regular será la magnitud del campo  $\vec{B}$  en función de la posición.

**EJECUTAR** la solución como sigue:

1. Lleve a cabo la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  a lo largo del trayecto de integración elegido. Si  $\vec{B}$  es tangente a todo o a una parte del trayecto de integración y tiene la misma magnitud  $B$  en todos los puntos, entonces su integral de línea es igual al producto de  $B$  por la longitud de esa parte del trayecto. Si  $\vec{B}$  es perpendicular a alguna parte del trayecto, esa parte no contribuye a la integral.

- En la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  es siempre el campo magnético *total* en cada punto del trayecto. Este campo puede ser en parte ocasionado por corrientes encerradas por el trayecto y en parte a corrientes externas al trayecto. Si *no* hay una corriente neta encerrada por el trayecto, el campo en los puntos sobre el trayecto no es necesariamente cero, pero la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  siempre es cero.
- Proporcione la corriente  $I_{\text{enc}}$  encerrada por el trayecto de integración. La regla de la mano derecha indica el signo de esta corriente. Doble los dedos de la mano derecha de modo que sigan el trayecto de integración en la dirección en que se lleva a cabo la integración. Por lo tanto el pulgar derecho apun-

ta en la dirección de la corriente positiva. Si  $\vec{B}$  es tangente a la integración en todos los puntos a lo largo del trayecto e  $I_{\text{enc}}$  es positiva, entonces la dirección de  $\vec{B}$  coincide con la dirección del trayecto de integración; si, en cambio,  $I_{\text{enc}}$  es negativa, la dirección de  $\vec{B}$  es opuesta a la de la integración.

- Aplique la ley de Ampere  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  para despejar la variable que se busca.

**EVALUAR** la respuesta: Si su resultado es una expresión de la magnitud del campo en función de la posición, podrá comprobarlo examinando cómo se comporta la expresión en diferentes límites.

### Ejemplo 28.8

## Campo de un conductor recto y largo que transporta corriente

En la sección 28.6 se dedujo la ley de Ampere con base en la ecuación (28.9) referente al campo de un conductor recto y largo que transporta corriente. Invierta este proceso y aplique la ley de Ampere para hallar la magnitud y dirección de  $\vec{B}$  respecto a esta situación.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Se aprovecha la simetría cilíndrica de la situación tomando como trayecto de integración un círculo de radio  $r$  centrado en el conductor y que se halla en un plano perpendicular a él, como en la figura 28.15a (sección 28.6). En cada punto,  $\vec{B}$  es tangente a este círculo.

**EJECUTAR:** Con el trayecto de integración elegido, la ley de Ampere [ecuación (28.20)] se transforma en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel} dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Se deduce de inmediato la ecuación (28.9):  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ .

La ley de Ampere determina la dirección de  $\vec{B}$  y también su magnitud. Dado que se recorre el trayecto de integración en sentido contrario a las manecillas del reloj, la dirección positiva de la corriente es hacia afuera del plano de la figura 28.15a; esto coincide con la dirección real de la corriente en la figura, de modo que  $I$  es positiva y la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  también es positiva. Puesto que los  $d\vec{l}$  se suceden en sentido contrario a las manecillas del reloj, también la dirección de  $\vec{B}$  tiene ese mismo sentido, como se muestra en la figura 28.15a.

**EVALUAR:** Nuestros resultados son congruentes con los de la sección 28.6, como debe ser.

### Ejemplo 28.9

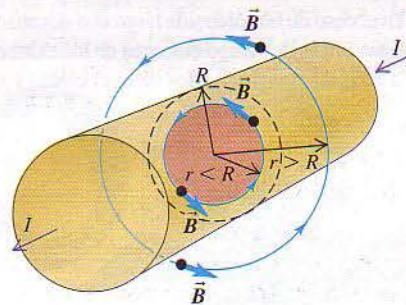
## Campo en el interior de un conductor cilíndrico largo

Un conductor cilíndrico de radio  $R$  transporta una corriente  $I$ . La corriente se distribuye uniformemente en toda el área de sección transversal del conductor. Halle el campo magnético, en función de la distancia  $r$  al eje del conductor, de puntos situados tanto adentro ( $r < R$ ) como afuera ( $r > R$ ) del conductor.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Para encontrar el campo magnético *adentro* del conductor, se toma como trayecto de integración un círculo de radio  $r < R$ , como se muestra en la figura 28.18. *Afuera* del conductor, se utiliza de nuevo un círculo, pero con un radio  $r > R$ . En ambos casos el trayecto de integración aprovecha la simetría circular de la distribución de campo magnético.

**EJECUTAR:** Adentro del conductor,  $\vec{B}$  tiene la misma magnitud en todos los puntos de trayecto circular de integración y es tangente al trayecto. Por tanto, la magnitud de la integral de línea es simple-



**28.18** Para hallar el campo magnético en el radio  $r < R$  se aplica la ley de Ampere al círculo que encierra el área roja. La corriente a través del área roja es  $(r^2/R^2)I$ . Para hallar el campo magnético en el radio  $r > R$  se aplica la ley de Ampere al círculo que encierra todo el conductor.

mente  $B(2\pi r)$ . Si se aplica la regla de la mano derecha para establecer el signo de la corriente, la corriente a través del área roja encerrada por el trayecto es positiva; por tanto,  $\vec{B}$  apunta en la misma dirección que el trayecto de integración, como se muestra. Para hallar la corriente  $I_{\text{enc}}$  encerrada por el trayecto, adviértase que la densidad de corriente (corriente por unidad de área) es  $J = I/\pi R^2$ ; por tanto,  $I_{\text{enc}} = J(\pi r^2) = Ir^2/R^2$ . Por último, la ley de Ampere da

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (\text{adentro del conductor, } r < R) \quad (28.21)$$

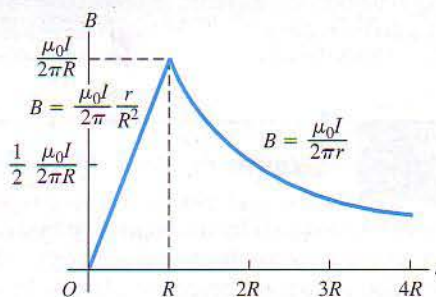
Con respecto a la trayectoria circular de integración externa al conductor ( $r > R$ ), se aplican los mismos argumentos de simetría y la magnitud de  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es de nuevo  $B(2\pi r)$ . La regla de la mano derecha proporciona la dirección de  $\vec{B}$  como se muestra en la figura 28.18. Con esta trayectoria,  $I_{\text{enc}} = I$ , la corriente total en el conductor. La aplicación de la ley de Ampere da la misma ecuación que en el ejemplo 28.8, con el mismo resultado de  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{afuera del conductor, } r > R) \quad (28.22)$$

Afuera del conductor, el campo magnético es el mismo que el de un conductor recto y largo que transporta una corriente  $I$ , independientemente del radio  $R$  sobre el que se distribuye la corriente. De hecho, el campo magnético afuera de *cualquier* distribución cilíndricamente

simétrica de corriente es el mismo que si toda la corriente se concentrara a lo largo del eje de la distribución. Esto es análogo a los resultados de los ejemplos 22.5 y 22.9 (sección 22.4), donde hallamos que el campo *eléctrico* afuera de un cuerpo *con carga* esféricamente simétrico es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada en el centro.

**EVALUACIÓN:** Dése cuenta que en la superficie del conductor ( $r = R$ ) la ecuación (28.21) para  $r < R$  y la ecuación (28.22) para  $r > R$  concuerdan (como debe ser). La figura 28.19 muestra una gráfica de  $B$  en función de  $r$ , tanto adentro como afuera del conductor.

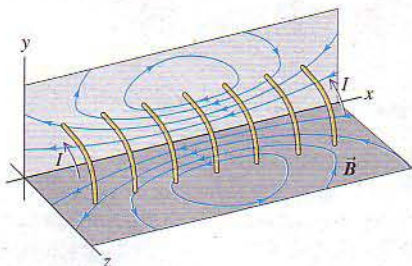


**28.19** Magnitud del campo magnético adentro y afuera de un conductor cilíndrico recto y largo de radio  $R$  que transporta una corriente  $I$ .

### Ejemplo 28.10

## Campo de un solenoide

Un solenoide, como se comentó en el ejemplo 28.6, consiste en un devanado helicoidal de alambre sobre un cilindro, por lo regular de sección transversal circular. Puede tener cientos o miles de espiras muy próximas unas de otras, cada una de las cuales se puede considerar como una espira circular. Puede haber varias capas de devanados. Para simplificar, la figura 28.20 muestra un solenoide con sólo unas pocas espiras, todas las cuales conducen la misma corriente  $I$ , y el campo total  $\vec{B}$  en todos los puntos es la suma vectorial de los campos generados por las espiras individuales. La figura muestra líneas de campo en los planos  $xy$  y  $xz$ . Se ha dibujado un conjunto de líneas de campo con separación uniforme en el centro del solenoide. Los cálculos exactos muestran que, en el caso de un solenoide largo con devanado compacto, la mitad de estas líneas de campo emergen de los extremos y la mitad se “fugan” a través de los devanados entre el centro y el extremo.



**28.20** Líneas de campo magnético creadas por la corriente de un solenoide. Para mayor claridad, sólo se muestran unas pocas espiras.

Las líneas de campo cercanas al centro del solenoide son aproximadamente paralelas, lo que indica un  $\vec{B}$  casi uniforme; afuera del solenoide, las líneas de campo están dispersas y el campo magnético es débil. Si el solenoide es largo en comparación con su diámetro de sección transversal y las bobinas tienen un devanado compacto, el campo *interno* cerca del punto medio de la longitud del solenoide es casi uniforme en toda la sección transversal y paralelo al eje, y el campo *externo* cerca del punto medio es muy pequeño.

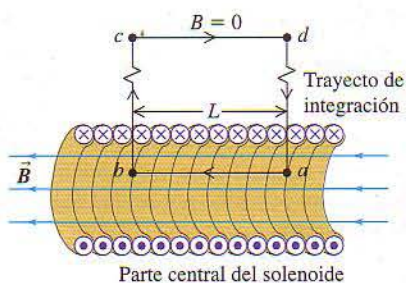
Aplice la ley de Ampere para hallar el campo cerca de, o en el centro de un solenoide largo de este tipo. El solenoide tiene  $n$  espiras por unidad de longitud y conduce una corriente  $I$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Se elige como trayecto de integración el rectángulo  $abcd$  de la figura 28.21. El lado  $ab$ , de longitud  $L$ , es paralelo al eje del solenoide. Se supone que los lados  $bc$  y  $da$  son muy largos, de modo que el lado  $cd$  está lejos del solenoide; en estas condiciones el campo en el lado  $cd$  es tan pequeño que resulta insignificante.

**EJECUTAR:** Por simetría, el campo  $\vec{B}$  a lo largo del lado  $ab$  es paralelo a este lado y es constante. Al llevar a cabo la integración de la ley de Ampere, seguimos el lado  $ab$  en la dirección de  $\vec{B}$ . Así pues, en este lado  $B_{\parallel} = +B$

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$



**28.21** Sección de un solenoide largo con devanado compacto centrado en el eje de las  $x$ . Se muestran las líneas de campo magnético en los planos  $xy$  y  $xz$ .

A lo largo de los lados  $bc$  y  $da$ ,  $B_{\parallel} = 0$  porque  $\vec{B}$  es perpendicular a estos lados; a lo largo del lado  $cd$ ,  $B_{\parallel} = 0$  porque  $\vec{B} = \mathbf{0}$ . Por tanto, la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  alrededor de todo el trayecto cerrado se reduce a  $BL$ .

El número de espiras del tramo  $L$  es  $nL$ . Cada una de estas espiras atraviesa una vez el rectángulo  $abcd$  y transporta una corriente  $I$ , donde  $I$  es la corriente en los devanados. En estos términos la corriente total encerrada por el rectángulo es  $I_{\text{enc}} = nLI$ . De acuerdo con la ley de Ampere, dado que la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es positiva,  $I_{\text{enc}}$  también debe ser positiva; en consecuencia, la corriente que pasa a través de la superficie limitada por el trayecto de integración debe tener la dirección que se muestra en la figura 28.21. Por esto la ley de Ampere proporciona la magnitud  $B$ :

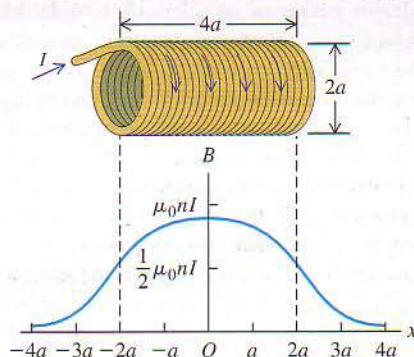
$$BL = \mu_0 nLI$$

$$B = \mu_0 nI \quad (\text{solenoides}) \quad (28.23)$$

No es necesario que el lado  $ab$  esté sobre el eje del solenoide, por lo cual este cálculo prueba además que el campo es uniforme en toda la sección transversal en el centro de la longitud del solenoide.

**EVALUAR:** Dése cuenta que la dirección de  $\vec{B}$  adentro del solenoide coincide con la del momento magnético vectorial  $\vec{\mu}$  del solenoide. Este resultado es el mismo que se obtuvo en la sección 28.5 con respecto a una sola espira portadora de corriente.

Con respecto a los puntos a lo largo del eje, el campo es más intenso en el centro del solenoide y decae cerca de los extremos. En el caso de un solenoide muy largo en comparación con su diámetro, la intensidad del campo en cada extremo es exactamente la mitad de la intensidad en el centro. Cuando el solenoide es corto y ancho, la relación es más complicada. La figura 28.22 muestra una gráfica de  $B$  en función de  $x$  respecto a puntos situados sobre el eje de un solenoide corto.



**28.22** Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide de longitud  $4a$ , equivalente a cuatro veces su radio  $a$ . La magnitud del campo en cada extremo es aproximadamente la mitad de su valor en el centro. (Compárese con la figura 28.13, que representa el campo de  $N$  espiras circulares).

**Ejemplo 28.11**

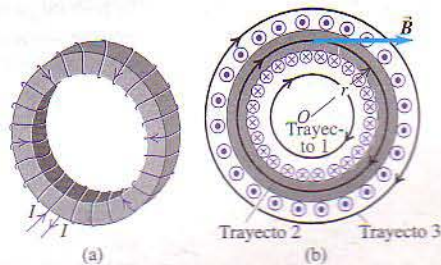
**Campo de un solenoide toroidal**

La figura 28.23a muestra un **solenoides toroidal** con forma de rosquilla, también conocido como *toroide*, devanado con  $N$  espiras de alambre que transportan una corriente  $I$ . En una versión práctica las espiras estarían más próximas unas de otras que en la figura. Halle el campo magnético en todos los puntos.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** El flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide genera una componente de campo magnético perpendicular al plano de la figura, exactamente como en el caso de la espira de corriente analizado en la sección 28.5. Pero si las bobinas tienen un devanado muy compacto, se las puede considerar como espiras circulares que conducen corriente entre los radios interior y exterior del solenoide toroidal; el flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide es por tanto insignificante, al igual que la componente perpendicular de  $\vec{B}$ . En esta aproximación idealizada la simetría circular de la situación nos dice que las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos con el eje del toroide. Para aprovechar esta simetría en el cálculo del

campo, conviene elegir trayectos de integración circulares para aplicar la ley de Ampere. Tres de estos trayectos se muestran como líneas negras en la figura 28.23b.



**28.23** (a) Solenoide toroidal. Para mayor claridad, sólo se muestran unas pocas espiras del devanado. (b) Trayectos de integración (círculos negros) que sirven para calcular el campo magnético  $\vec{B}$  establecido por una corriente (se muestra como puntos y cruces) en un solenoide toroidal. El campo es casi cero en todos los puntos, salvo dentro del espacio encerrado por los devanados.

**EJECUTAR:** Considere en primer término el trayecto de integración 1 de la figura 28.23b. Si el solenoide toroidal produce algún campo en esta región, deberá ser *tangente* al trayecto en todos los puntos, y  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  será igual al producto de  $B$  por la circunferencia  $l = 2\pi r$  del trayecto. Pero la corriente total encerrada por el trayecto es cero, por lo que, de acuerdo con la ley de Ampere, el campo  $\vec{B}$  debe ser cero en todo este trayecto.

De modo análogo, si el solenoide toroidal genera algún campo a lo largo del trayecto 3, también deberá ser tangente al trayecto en todos los puntos. Cada espira del devanado pasa *dos veces* a través del área limitada por este trayecto, transportando corrientes iguales en sentidos opuestos. La corriente *neta*  $I_{\text{enc}}$  encerrada dentro de esta área es, por tanto, cero y  $\vec{B} = \mathbf{0}$  en consecuencia en todos los puntos del trayecto. Conclusión: *El campo de un solenoide toroidal idealizado está confinado en su totalidad en el espacio encerrado por los devanados.* Podemos pensar en un solenoide toroidal idealizado de este tipo como en un solenoide con devanado compacto que ha sido doblado para formar un círculo.

Por último, consideraremos el trayecto 2, un círculo de radio  $r$ . Nuevamente por simetría, es de esperar que el campo  $\vec{B}$  sea tangente al trayecto y  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $2\pi rB$ . Cada espira del devanado pasa *una vez* a través del área limitada por el trayecto 2. La corriente total encerrada por el trayecto es  $I_{\text{enc}} = NI$ , donde  $N$  es el número total de espiras del devanado;  $I_{\text{enc}}$  es positiva con respecto a la dirección de integración en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 28.23b; por tanto,  $\vec{B}$  tiene la dirección que se muestra. En estos términos, de acuerdo con la ley de Ampere,

$$2\pi rB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (\text{solenoides toroidal}) \quad (28.24)$$

**EVALUAR:** El campo magnético *no* es uniforme en toda una sección transversal del núcleo, porque el radio  $r$  es más grande en el lado externo de la sección que en el interno. Sin embargo, si el espesor radial del núcleo es pequeño en comparación con  $r$ , el campo varía sólo un poco en una sección transversal. En ese caso, considerando que  $2\pi r$  es la longitud de la circunferencia del toroide y que  $N/2\pi r$  es el número de espiras por unidad de longitud  $n$ , se puede escribir el campo como

$$B = \mu_0 nI$$

tal como es en el centro de un solenoide *recto* largo.

En un solenoide toroidal real, las espiras no son exactamente espiras circulares, sino segmentos de una hélice doblada. En consecuencia, el campo en el exterior no es estrictamente cero. Para estimar su magnitud, suponemos que la figura 28.23a es casi equivalente, con respecto a puntos situados afuera del toro, para una espira circular con una sola espira y de radio  $r$ . En estas condiciones podemos demostrar, mediante la ecuación (28.17), que el campo en el *centro* del toro es más pequeño que el campo del interior por un factor de aproximadamente  $N/\pi$ .

Las ecuaciones que hemos deducido respecto al campo en un solenoide recto o toroidal con devanado compacto son estrictamente correctas sólo si los devanados están en un *vacío*. No obstante, para casi todo fin práctico se pueden aplicar a devanados en aire o sobre un núcleo de un material no magnético y no superconductor. En la sección siguiente mostraremos cómo se modifican si el núcleo es un material magnético.

### Evalúe su comprensión

Considere un alambre conductor que se extiende a lo largo del eje central de un cilindro conductor hueco. Un arreglo de este tipo, conocido como *cable coaxial*, tiene numerosas aplicaciones en el campo de las telecomunicaciones. (Véase la figura 22.20. El cable que conecta el televisor a un proveedor local de televisión por cable es un ejemplo de cable coaxial). En un cable coaxial fluye una corriente  $I$  en un sentido a lo largo del cilindro conductor hueco, la cual se extiende uniformemente en toda el área de sección transversal del cilindro. Una corriente igual fluye en el sentido opuesto a lo largo del alambre central. Con base en la ley de Ampere, explique por qué las corrientes no crean campo magnético alguno afuera del cable.

## \*28.8 | Materiales magnéticos

Al analizar cómo es que las corrientes generan campos magnéticos, hemos supuesto que los conductores están rodeados de un vacío. Pero las bobinas de los transformadores, motores, generadores y electroimanes tienen casi siempre núcleos de hierro para aumentar el campo magnético y confinarlo en las regiones deseadas. Los imanes permanentes, las cintas de grabación magnética y los discos de computadora dependen directamente de las propiedades magnéticas de los materiales; cuando se almacena información en un disco de computadora, lo que en efecto se hace es establecer una configuración de imanes permanentes microscópicos sobre el disco. Por todo esto vale la pena examinar algunos aspectos de las propiedades magnéticas de los materiales. Después de describir los orígenes ató-

micos de las propiedades magnéticas, analizaremos tres clases generales de comportamiento magnético que se presentan en los materiales: el *paramagnetismo*, el *diamagnetismo* y el *ferromagnetismo*.

### El magnetón de Bohr

Como comentamos brevemente en la sección 27.7, los átomos de los que se compone toda la materia contienen electrones en movimiento, y estos electrones forman espiras de corriente microscópicas que producen campos magnéticos propios. En muchos materiales estas corrientes están orientadas al azar y no crean un campo magnético neto. Pero en ciertos materiales un campo externo (un campo generado por corrientes externas al material) puede provocar que estas espiras se orienten preferentemente con el campo, por lo que sus campos magnéticos se *suman* al campo externo. Se dice entonces que el material está *magnetizado*.

Veamos de dónde surgen estas corrientes microscópicas. La figura 28.24 muestra un modelo primitivo de un electrón en un átomo. Representamos el electrón (masa  $m$ , carga  $-e$ ) en movimiento en una órbita circular de radio  $r$  y con rapidez  $v$ . Esta carga en movimiento equivale a una espira de corriente. En la sección 27.7 hallamos que una espira de corriente con un área  $A$  y una corriente  $I$  tiene un momento dipolar magnético  $\mu$  dado por  $\mu = IA$ ; en el caso del electrón en órbita el área de la espira es  $A = \pi r^2$ . Para hallar la corriente asociada con el electrón, advertimos que el periodo orbital  $T$  (el tiempo para que el electrón describa una órbita completa) es la circunferencia de la órbita dividida entre la rapidez del electrón:  $T = 2\pi r/v$ . La corriente equivalente  $I$  es la carga total que pasa por un punto cualquiera de la órbita por unidad de tiempo, la cual es simplemente el cociente de la magnitud  $e$  de la carga del electrón entre el periodo orbital  $T$ :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Por esto, el momento magnético  $\mu = IA$  es

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{evr}{2} \quad (28.25)$$

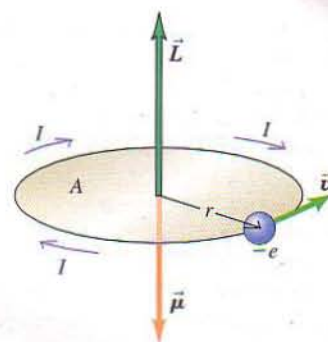
Resulta útil expresar  $\mu$  en términos de la *cantidad de movimiento angular*  $L$  del electrón. En el caso de una partícula que se sigue una trayectoria circular, la magnitud de la cantidad de movimiento angular es igual a la magnitud de la cantidad de movimiento  $mv$  multiplicada por el radio  $r$ , esto es,  $L = mvr$  (sección 10.5). Comparando esto con la ecuación (28.25), podemos escribir

$$\mu = \frac{e}{2m} L \quad (28.26)$$

La ecuación (28.26) es de utilidad en este análisis porque la cantidad de movimiento angular atómica está *cuantizada*; su componente en una dirección en particular es siempre un múltiplo entero de  $h/2\pi$ , donde  $h$  es una constante física fundamental llamada *constante de Planck*. El valor numérico de  $h$  es

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Así que, la cantidad  $h/2\pi$  representa una unidad fundamental de cantidad de movimiento angular en los sistemas atómicos, del mismo modo que  $e$  es una unidad fundamental de carga. Con la cuantización de  $L$  se encuentra asociada una incertidumbre fundamental de la dirección de  $\vec{L}$  y, por tanto, de  $\vec{\mu}$ . En el análisis que sigue, cuando se hable de la magnitud de un momento magnético, un enunciado más preciso sería "componente máxima en una dirección dada". Así, afirmar que un momento magnético  $\vec{\mu}$  está alineado con un campo magnético  $\vec{B}$  significa en realidad que  $\vec{\mu}$  tiene su componente máxima posible en la dirección de  $\vec{B}$ ; estas componentes siempre están cuantizadas.



**28.24** Un electrón que se desplaza con rapidez  $v$  en una órbita circular de radio  $r$  tiene una cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$  y un momento dipolar magnético orbital  $\vec{\mu}$  en dirección opuesta. También tiene una cantidad de movimiento angular de espín y un momento dipolar magnético de espín en dirección opuesta.



La ecuación (28.26) muestra que con la unidad fundamental de cantidad de movimiento angular se halla asociada una unidad fundamental correspondiente de momento magnético. Si  $L = h/2\pi$ , en tal caso

$$\mu = \frac{e}{2m} \left( \frac{h}{2\pi} \right) = \frac{eh}{4\pi m} \quad (28.27)$$

Esta cantidad se conoce como el **magnetón de Bohr**, y se denota con  $\mu_B$ . Su valor numérico es

$$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

Le recomendamos verificar que estos dos conjuntos de unidades sean congruentes. El segundo conjunto resulta útil cuando se calcula la energía potencial  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  correspondiente a un momento magnético en un campo magnético.

Los electrones también tienen una cantidad de movimiento angular intrínseca, llamada *espín*, que no tiene relación con el movimiento orbital pero se puede visualizar en un modelo clásico como girar sobre un eje. Esta cantidad de movimiento angular también tiene un momento magnético asociado, y su magnitud resulta ser casi exactamente un magnetón de Bohr. (Ciertos efectos que tienen que ver con la cuantización del campo magnético hacen que el momento magnético de espín sea de aproximadamente  $1.001 \mu_B$ ).

### Paramagnetismo

En un átomo, la mayor parte de los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones suman cero. De cualquier modo, en ciertos casos el átomo tiene un momento magnético neto que es del orden de  $\mu_B$ . Cuando se coloca un material de esta clase en un campo magnético, el campo ejerce un momento de torsión sobre cada momento magnético, de acuerdo con la ecuación (27.26):  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ . Estos momentos de torsión tienden a alinear los momentos magnéticos con el campo, en la posición de energía potencial mínima, como expusimos en la sección 27.7. En esta posición, las direcciones de las espiras de corriente son de tal naturaleza que se *suman* al campo magnético aplicado desde el exterior.

En la sección 28.5 vimos que el campo  $\vec{B}$  generado por una espira de corriente es proporcional al momento dipolar magnético de la espira. Del mismo modo, el campo  $\vec{B}$  adicional generado por espiras de corriente electrónicas microscópicas es proporcional al momento magnético total  $\vec{\mu}_{\text{total}}$  por unidad de volumen  $V$  del material. Esta cantidad vectorial se conoce como **magnetización** del material y se denota con  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{\text{total}}}{V} \quad (28.28)$$

El campo magnético adicional debido a la magnetización del material resulta ser igual simplemente a  $\mu_0 \vec{M}$ , donde  $\mu_0$  es la misma constante que aparece en la ley de Biot y Savart y en la ley de Ampere. Cuando un material de este tipo rodea por completo a un conductor portador de corriente, el campo magnético total  $\vec{B}$  en el material es

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (28.29)$$

donde  $\vec{B}_0$  es el campo generado por la corriente del conductor.

Para comprobar que las unidades de la ecuación (28.29) son congruentes, dése cuenta que la magnetización  $\vec{M}$  es momento magnético por unidad de volumen. Las unidades de momento magnético son de corriente por área ( $\text{A} \cdot \text{m}^2$ ); por tanto, las unidades de magnetización son  $(\text{A} \cdot \text{m}^2)/\text{m}^3 = \text{A/m}$ . De acuerdo con la sección 28.1, las unidades de la constante  $\mu_0$  son  $\text{T} \cdot \text{m/A}$ . Así pues, las unidades de  $\mu_0 \vec{M}$  son las mismas que las unidades de  $\vec{B}$ :  $(\text{T} \cdot \text{m/A})(\text{A/m}) = \text{T}$ .

De un material que muestra el comportamiento que hemos descrito se dice que es **paramagnético**. El resultado es que el campo magnético en cualquier punto de

un material de este tipo es mayor, por un factor adimensional  $K_m$ , denominado **permeabilidad relativa** del material, que lo que sería si se sustituyera el material por un vacío. El valor de  $K_m$  difiere en los distintos materiales; en los sólidos y líquidos paramagnéticos comunes a temperatura ambiente,  $K_m$  fluctúa típicamente entre 1.00001 y 1.003.

Todas las ecuaciones de ese capítulo que relacionan campos magnéticos con sus fuentes se pueden adaptar a la situación donde el conductor portador de corriente está incrustado en un material paramagnético. Sólo es necesario sustituir  $\mu_0$  por  $K_m\mu_0$ . Este producto se denota habitualmente con  $\mu$  y se conoce como la **permeabilidad** del material:

$$\mu = K_m\mu_0 \quad (28.30)$$

**CUIDADO** En la ecuación (28.30) se utiliza una notación verdaderamente peligrosa, ya que también hemos empleado  $\mu$  como símbolo del momento magnético. Se acostumbra utilizar  $\mu$  para representar ambas cantidades, pero tenga cuidado; de ahora en adelante, cada vez que vea una  $\mu$ , cerciórese de saber si se trata de permeabilidad o de momento magnético. Por lo regular el contexto lo da a saber.

La cantidad en la que la permeabilidad relativa difiere de la unidad se llama **susceptibilidad magnética**, y se denota con  $\chi_m$ :

$$\chi_m = K_m - 1 \quad (28.31)$$

Tanto  $K_m$  como  $\chi_m$  son cantidades adimensionales. En la tabla 28.1 se presentan los valores de susceptibilidad magnética de varios materiales. Por ejemplo, en el caso del aluminio,  $\chi_m = 2.2 \times 10^{-5}$  y  $K_m = 1.000022$ . Los materiales del primer grupo de la tabla son paramagnéticos; en breve analizaremos el segundo grupo de materiales, llamados *diamagnéticos*.

A la tendencia de los momentos magnéticos atómicos de alinearse de manera paralela al campo magnético (donde la energía potencial es mínima) se opone el movimiento térmico aleatorio, que tiende a distribuir al azar sus orientaciones. Por esta razón, la susceptibilidad paramagnética siempre disminuye al aumentar la temperatura. En muchos casos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta  $T$ , y la magnetización  $M$  se puede expresar como

$$M = C\frac{B}{T} \quad (28.32)$$

Esta relación se llama *ley de Curie*, en honor de su descubridor, Pierre Curie (1859–1906). La cantidad  $C$  es una constante, que es diferente en los distintos materiales y se llama *constante de Curie*.

Como lo describimos en la sección 27.7, un cuerpo con dipolos magnéticos atómicos es atraído hacia los polos de un imán. En casi todas las sustancias paramagnéticas esta atracción es muy débil debido a la redistribución térmica aleatoria de los momentos magnéticos atómicos. Es por esto que no se pueden levantar objetos de aluminio (una sustancia paramagnética) con un imán. Sin embargo, a temperaturas muy bajas los efectos térmicos se reducen, la magnetización aumenta de acuerdo con la ley de Curie y las fuerzas de atracción son mayores.

**Tabla 28.1** Susceptibilidades magnéticas de materiales paramagnéticos y diamagnéticos a  $T = 20^\circ\text{C}$

Material	$\chi_m = K_m - 1$ ( $\times 10^{-5}$ )
<b>Paramagnéticos</b>	
Alumbre de hierro y amonio	66
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2.2
Sodio	0.72
Oxígeno gaseoso	0.19
<b>Diamagnéticos</b>	
Bismuto	-16.6
Mercurio	-2.9
Plata	-2.6
Carbón (diamante)	-2.1
Plomo	-1.8
Cloruro de sodio	-1.4
Cobre	-1.0

### Ejemplo 28.12

## Dipolos magnéticos en un material paramagnético

El óxido nítrico (NO) es un compuesto paramagnético. Sus moléculas tienen un momento magnético con una componente máxima en cualquier dirección de aproximadamente un magnetón de Bohr cada una. En un campo magnético de magnitud  $B = 1.5 \text{ T}$ , compare la

energía de interacción de los momentos magnéticos con el campo con la energía cinética promedio de traslación de las moléculas a una temperatura de 300 K.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** En la sección 27.6 dedujimos la ecuación  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  que describe la energía de interacción de un momento magnético  $\vec{\mu}$  con un campo  $\vec{B}$ . De acuerdo con la sección 18.3 la energía cinética promedio de traslación de una molécula a una temperatura  $T$  es  $K = \frac{3}{2}kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann.

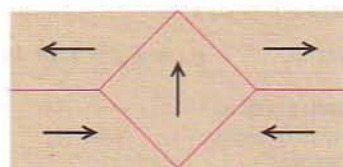
**EJECUTAR:** Podemos escribir la energía de interacción como  $U = -(\mu \cos \phi)B$ , donde  $\mu \cos \phi$  es la componente del momento magnético  $\vec{\mu}$  en la dirección del campo  $\vec{B}$ . En el caso que nos ocupa el valor máximo de la componente  $\mu \cos \phi$  es de aproximadamente  $\mu_B$ ; por tanto,

$$|U|_{\text{máx}} \approx \mu_B B = (9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T})(1.5 \text{ T}) \\ = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J} = 8.7 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

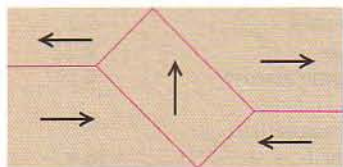
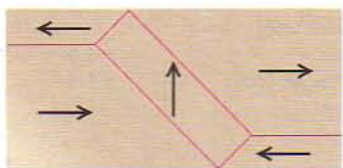
La energía cinética promedio de traslación  $K$  es

$$K = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) \\ = 6.2 \times 10^{-21} \text{ J} = 0.039 \text{ eV}$$

**EVALUAR:** A una temperatura de 300 K la energía de interacción magnética es mucho *menor* que la energía cinética aleatoria, por lo que sólo es de esperar un grado muy leve de alineación. Es por esto que las susceptibilidades paramagnéticas a la temperatura ordinaria son por lo regular muy pequeñas.



(a) Sin campo

(b) Campo débil  $\vec{B}$ (c) Campo más intenso  $\vec{B}$ 

**28.25** En este dibujo adaptado de una fotografía con aumento, las flechas muestran las direcciones de magnetización de los dominios de un cristal individual de níquel. Los dominios que están magnetizados en la dirección de un campo magnético aplicado crecen.

**Diamagnetismo**

En ciertos materiales el momento magnético total de todas las espiras atómicas de corriente es cero en ausencia de un campo magnético. Pero incluso estos materiales presentan efectos magnéticos porque un campo externo altera los movimientos de los electrones dentro de los átomos, con lo cual genera espiras de corriente adicionales y dipolos magnéticos inducidos comparables a los dipolos *eléctricos* inducidos que estudiamos en la sección 24.5. En este caso la dirección del campo adicional creado por estas espiras de corriente siempre es *opuesta* a la del campo externo. (Este comportamiento se explica en función de la ley de Faraday de la inducción, la cual estudiaremos en el capítulo 29. Una corriente inducida siempre tiende a cancelar el cambio de campo que la provocó).

Se dice que estos materiales son **diamagnéticos**. Siempre tienen susceptibilidad magnética negativa, como se muestra en la tabla 28.1, y permeabilidad magnética  $K_m$  ligeramente *menor* que la unidad, típicamente del orden de 0.99990 a 0.99999 en los sólidos y líquidos. Las susceptibilidades diamagnéticas son casi totalmente independientes de la temperatura.

**Ferromagnetismo**

Existe una tercera clase de materiales, llamados materiales **ferromagnéticos**, entre los que se cuentan el hierro, el níquel, el cobalto y muchas aleaciones que contienen estos elementos. En estos materiales, las intensas interacciones entre los momentos magnéticos atómicos los incitan a alinearse paralelamente unos a otros en regiones denominadas **dominios magnéticos**, incluso en ausencia de un campo externo. La figura 28.25 muestra un ejemplo de estructura de dominios magnéticos. Dentro de cada dominio, casi todos los momentos magnéticos atómicos son paralelos.

Cuando no existe un campo aplicado desde el exterior, las magnetizaciones de los dominios están orientadas al azar. Pero cuando está presente un campo  $\vec{B}_0$  (generado por corrientes externas), los dominios tienden a orientarse paralelos al campo. Además las fronteras de los dominios se desplazan; los dominios que están magnetizados en la dirección del campo crecen, y los que están magnetizados en otras direcciones se encogen. Ya que el momento magnético total de un dominio puede ser de muchos miles de magnetones de Bohr, los momentos de torsión que tienden a alinear los dominios con un campo externo son mucho más intensos que los que se presentan en los materiales paramagnéticos. La permeabilidad relativa  $K_m$  es *mucho* mayor que la unidad: típicamente, del orden de 1000 a 100 000. En consecuencia, un objeto hecho de un material ferromagnético, como el hierro, es fuertemente magnetizado por el campo de un imán permanente y es

atraído hacia el imán, (véase la figura 27.36). Un material paramagnético como el aluminio también es atraído hacia un imán permanente, pero las  $K_m$  de los materiales paramagnéticos son tan pequeñas en comparación con las  $K_m$  de los materiales ferromagnéticos, que la atracción es muy débil. Por esto, un imán puede levantar clavos de hierro, pero no latas de aluminio (Fig. 28.26).

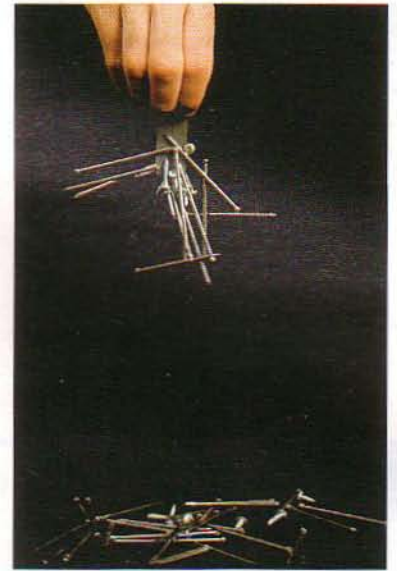
Conforme se incrementa el campo externo, se alcanza finalmente un punto en el que casi *todos* los momentos magnéticos del material ferromagnético están alineados paralelamente al campo externo. Esta condición se conoce como *magnetización de saturación*; una vez alcanzada, un incremento adicional del campo externo no provoca el incremento en la magnetización ni el campo adicional generado por la magnetización.

La figura 28.27 muestra una “curva de magnetización”: una gráfica de la magnetización  $M$  en función del campo magnético externo  $B_0$  en el hierro dulce. Otra descripción de este comportamiento es que  $K_m$  no es constante, sino que disminuye a medida que  $B_0$  aumenta. (Los materiales paramagnéticos también presentan saturación a campos suficientemente intensos. Pero los campos magnéticos que se requieren son tan grandes que las desviaciones respecto a una relación lineal entre  $M$  y  $B_0$  sólo se observan a temperaturas muy bajas, de 1 K más o menos).

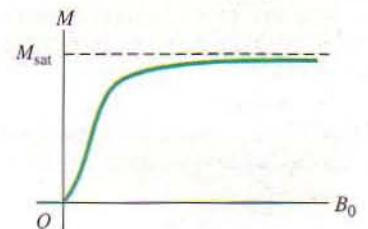
En muchos materiales ferromagnéticos la relación entre la magnetización y el campo magnético externo es diferente cuando el campo externo está aumentando que cuando está disminuyendo. La figura 28.28 muestra esta relación con respecto a un material de ese tipo. Cuando se magnetiza el material hasta saturación y a continuación se reduce a cero el campo externo, se conserva cierta magnetización. Este comportamiento es característico de los imanes permanentes, los cuales retienen la mayor parte de su magnetización de saturación cuando desaparece el campo magnetizante. Para reducir la magnetización a cero se requiere un campo magnético en la dirección inversa.

Este comportamiento se llama **histéresis**, y las curvas de la figura 28.28 se conocen como *curvas o ciclos de histéresis*. La magnetización y desmagnetización de un material que presenta histéresis implica una disipación de energía, y la temperatura del material aumenta durante este proceso.

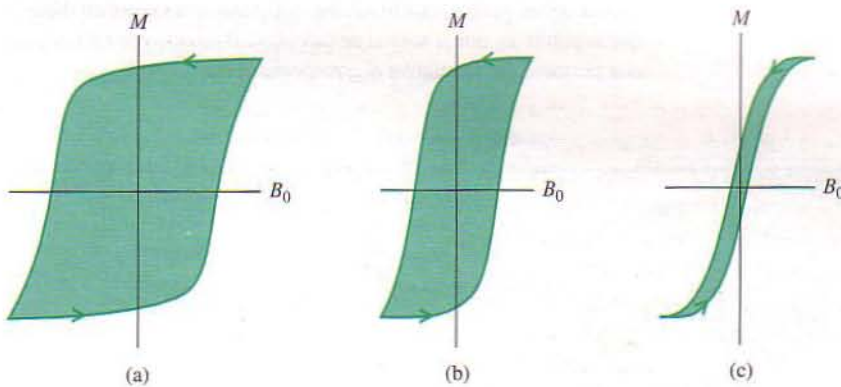
Los materiales ferromagnéticos se utilizan extensamente en electroimanes, núcleos de transformador y motores y generadores, en los cuales es deseable tener



**28.26** Este imán permanente puede levantar tornillos y clavos de acero (un material ferromagnético). Los clavos de aluminio (que es paramagnético) también serían atraídos hacia el imán, pero con tan poca fuerza que el imán no podría levantarlos.



**28.27** Curva de magnetización de un material ferromagnético. La magnetización  $M$  tiende a su valor de saturación  $M_{\text{sat}}$  conforme el campo magnético  $B_0$  (creado por corrientes externas) aumenta.



**28.28** Ciclos de histéresis. Los materiales tanto de (a) como de (b) permanecen fuertemente magnetizados cuando  $B_0$  se reduce a cero. Puesto que (a) también es difícil de desmagnetizar, sería bueno para imanes permanentes. Dado que (b) se magnetiza y desmagnetiza con más facilidad, se podría utilizar como material para memoria de computadora. El material de (c) sería útil en transformadores y otros dispositivos de corriente alterna, donde una histéresis nula sería óptima.

un campo magnético tan grande como sea posible con una corriente determinada. Ya que la histéresis disipa energía, los materiales que se utilizan en estas aplicaciones deben tener habitualmente un ciclo de histéresis tan estrecho como sea posible. Es frecuente el uso de hierro dulce; tiene gran permeabilidad sin una histéresis apreciable. En los imanes permanentes por lo regular es deseable un ciclo de histéresis amplio, con una magnetización de campo cero extenso, y la necesidad de un campo inverso extenso para desmagnetizar. Es común el uso de muchas clases de acero y de numerosas aleaciones, como el Alnico, en la fabricación de imanes permanentes. El campo magnético residual en un material de esta clase, después de haber sido magnetizado hasta cerca de la saturación, es típicamente del orden de 1 T, un valor que corresponde a una magnetización residual  $M = B/\mu_0$  de aproximadamente 800 000 A/m.

### Ejemplo 28.13

## Un material ferromagnético

Cierto imán permanente es de un material ferromagnético con una magnetización  $M$  de aproximadamente  $8 \times 10^5$  A/m. El imán tiene forma de un cubo de 2 cm por lado. a) Encuentre el momento dipolar magnético del imán. b) Estime el campo magnético debido al imán en un punto situado a 10 cm del imán a lo largo de su eje.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** El momento dipolar magnético se proporciona a partir de la magnetización, que es igual al momento magnético por unidad de volumen. Para estimar el campo magnético, se hace una aproximación del imán como una espira de corriente con el mismo momento magnético y se utilizan los resultados de la sección 28.5.

**EJECUTAR:** a) El momento magnético total es el producto de la magnetización por el volumen:

$$\mu_{\text{total}} = MV = (8 \times 10^5 \text{ A/m})(2 \times 10^{-2} \text{ m})^3 = 6 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

b) En la sección 28.5 se encontró que el campo magnético sobre el eje de una espira de corriente con un momento magnético  $\mu_{\text{total}}$  está dado por la ecuación (28.18),

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde  $x$  es la distancia desde la espira y  $a$  es su radio. Podemos emplear esta misma expresión en este caso, salvo que  $a$  se refiere al tamaño del imán permanente. En términos estrictos, existen complicaciones porque nuestro imán no tiene la misma geometría que una espira circular de corriente. Sin embargo, en vista de que  $x = 10$  cm es bastante grande en comparación con las dimensiones de 2 cm del imán, el término  $a^2$  es insignificante en comparación con  $x^2$  y se puede pasar por alto. Así pues,

$$\begin{aligned} B &\approx \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi x^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(6 \text{ A} \cdot \text{m}^2)}{2\pi(0.1 \text{ m})^3} \\ &= 1 \times 10^{-3} \text{ T} = 10 \text{ G} \end{aligned}$$

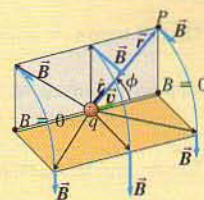
Este campo es de casi diez veces más intenso que el campo magnético de la Tierra. Un imán como éste desvía fácilmente la aguja de una brújula.

**EVALUAR:** Dése cuenta que utilizamos  $\mu_0$ , no la permeabilidad  $\mu$  del material magnético, para calcular  $B$ . La razón es que calculamos  $B$  en un punto situado *afuera* del material magnético. Habría que sustituir  $\mu_0$  por  $\mu$  sólo si se calculase  $B$  *adentro* de un material con permeabilidad relativa  $K_m$ , respecto al cual  $\mu = K_m \mu_0$ .

## RESUMEN

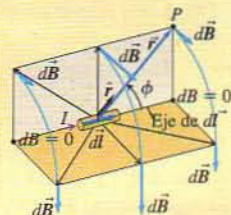
El campo magnético  $\vec{B}$  originado por una carga  $q$  que se desplaza con velocidad  $\vec{v}$  depende de la distancia  $r$  desde el punto de fuente (la ubicación de  $q$ ) al punto de campo (donde se mide  $\vec{B}$ ). El campo  $\vec{B}$  es perpendicular a  $\vec{v}$  y a  $\hat{r}$ , el vector unitario dirigido del punto de fuente al punto de campo. El principio de superposición de campos magnéticos establece que el campo total  $\vec{B}$  generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos creados por las cargas individuales. (Véase el ejemplo 28.1).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (28.2)$$



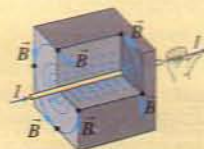
La ley de Biot y Savart proporciona el campo magnético  $d\vec{B}$  originado por un elemento  $d\vec{l}$  de un conductor que transporta una corriente  $I$ . El campo  $d\vec{B}$  es perpendicular tanto a  $d\vec{l}$  como a  $\hat{r}$ , el vector unitario desde el elemento hasta el punto de campo. El campo  $\vec{B}$  originado por un conductor finito portador de corriente es la integral de  $d\vec{B}$  sobre la longitud del conductor. (Véase el ejemplo 28.2).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (28.6)$$



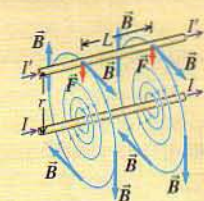
La magnitud del campo magnético  $B$  a una distancia  $r$  desde un conductor recto y largo que transporta una corriente  $I$  es inversamente proporcional a  $r$ . Las líneas de campo magnético son círculos coaxiales con el alambre, y sus direcciones están dadas por la regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos 28.3 y 28.4).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (28.9)$$



Dos conductores paralelos largos que transportan corriente se atraen si las corrientes están en la misma dirección y se repelen si las corrientes tienen direcciones contrarias. La fuerza magnética por unidad de longitud entre los conductores depende de sus corrientes  $I$  e  $I'$  y de su separación  $r$ . La definición del amperio se fundamenta en esta relación. (Véanse los ejemplos 28.5 y 28.6).

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad (28.11)$$



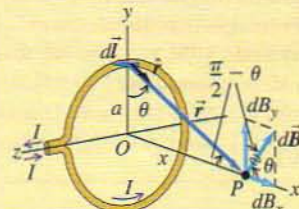
La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético generado a lo largo del eje de una espira conductora circular de radio  $a$  que transporta una corriente  $I$ . El campo depende de la distancia  $r$ , a lo largo del eje, desde el centro de la espira hasta el punto de campo. Si hay  $N$  espiras, el campo se multiplica por  $N$ . En el centro de la espira,  $x = 0$ . (Véase el ejemplo 28.7).

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (28.15)$$

(espira circular)

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (28.17)$$

(centro de  $N$  espiras circulares)



La ley de Ampere establece que la integral de línea de  $\vec{B}$  alrededor de cualquier trayecto cerrado es igual al producto de  $\mu_0$  por la corriente neta a través del área encerrada por el trayecto. El sentido positivo de la corriente se establece por medio de una regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos del 28.8 al 28.11).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (28.20)$$



La tabla siguiente es una lista de los campos magnéticos generados por varias distribuciones de corriente. En todos los casos el conductor transporta una corriente  $I$ .

Distribución de corriente	Punto del campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia $r$ del conductor	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio $a$	Sobre el eje de la espira	$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ (para $N$ espiras, multiplique estas expresiones por $N$ )
Conductor cilíndrico largo de radio $R$	Adentro del conductor, $r < R$	$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
	Afuera del conductor, $r > R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoides largo con devanado compacto y $n$ espiras por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Adentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Afuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoides toroidal (toroide) con devanado compacto y $N$ espiras	Adentro del espacio encerrado por los devanados, a una distancia $r$ del eje de simetría	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Afuera del espacio encerrado por los devanados	$B \approx 0$

En presencia de materiales magnéticos, la magnetización del material crea una contribución adicional a  $\vec{B}$ . En el caso de materiales paramagnéticos y diamagnéticos,  $\mu_0$  se sustituye en las expresiones de campo magnético por  $\mu = K_m \mu_0$ , donde  $\mu$  es la permeabilidad del material y  $K_m$  es su permeabilidad relativa. La susceptibilidad magnética  $\chi_m$  se define como  $\chi_m = K_m - 1$ . Las susceptibilidades magnéticas de los materiales paramagnéticos son magnitudes positivas pequeñas; las de los materiales diamagnéticos son magnitudes negativas pequeñas. En el caso de los materiales ferromagnéticos,  $K_m$  es mucho mayor que la unidad y no es constante. Ciertos materiales ferromagnéticos son imanes permanentes que conservan su magnetización aun después que ha desaparecido el campo magnético externo. (Véanse los ejemplos 28.12 y 28.13).

## Términos clave

ampere, 1075

diamagnético, 1090

dominio magnético, 1090

ferromagnético, 1090

histéresis, 1091

ley de Ampere, 1081

ley de Biot y Savart, 1069

magnéticos, 1068

magnetización, 1088

magnetón de Bohr, 1088

paramagnético, 1088

permeabilidad, 1089

permeabilidad relativa, 1089

principio de superposición de campos 1068

punto de campo, 1065

punto de fuente, 1065

solenoides toroidal, 1085

susceptibilidad magnética, 1089

## Notas

## Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

De acuerdo con la ecuación (28.17), el campo magnético en el centro de  $N$  espiras circulares de radio  $a$ , cada una de las cuales transporta una corriente  $I$ , es  $B_x = \mu_0 NI/2a$ . Aumentar el diámetro y, por tanto, el radio  $a$  provoca que el campo magnético disminuya. Un diámetro más grande significa que hay más cargas en movimiento que generan un campo magnético; también significa que el punto de campo del centro de la bobina está más lejos de esas cargas. En este caso el segundo factor es más importante; por tanto,  $B_x$  disminuye al aumentar el diámetro.

## Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

**Sección 28.1** La situación es la misma que se muestra en la figura 28.2, excepto que la velocidad del protón de arriba es  $\vec{v}$  diferente a  $-\vec{v}$ . El campo magnético debido al protón de abajo es el mismo que se muestra en la figura 28.2, pero la dirección de la fuerza magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  sobre el protón de arriba se invierte. Por tanto, la fuerza magnética es de atracción. Dado que la rapidez  $v$  es pequeña en comparación con  $c$ , la fuerza magnética es de menor magnitud que la fuerza eléctrica de repulsión y la fuerza neta sigue siendo de repulsión.

**Sección 28.2** El vector  $d\vec{l}$  apunta en la dirección  $x$  negativa y el vector unitario  $\hat{r}$  correspondiente a este campo apunta en la dirección  $y$  negativa. El campo se localiza en la dirección de  $d\vec{l} \times \hat{r}$ , que según la regla de la mano derecha apunta hacia afuera del plano de la figura 28.4 en la dirección  $z$  positiva. La distancia  $r = 0.60$  m desde el punto de fuente al punto de campo es la mitad de la distancia de 1.2 m del inciso (a) del ejemplo 28.2, pero el ángulo  $\phi = 90^\circ$  entre  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  es el mismo. La magnitud del campo  $B$  es proporcional a  $1/r^2$ , por lo que el valor de  $B$  es cuatro veces el valor del inciso (a) del ejemplo:  $B = 4(8.7 \times 10^{-8} \text{ T}) = 3.5 \times 10^{-7} \text{ T}$ . Con base en  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  y la regla de la mano derecha, la fuerza sobre el protón tiene la dirección  $x$  positiva. Puesto que  $\vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{B}$ , la magnitud de la fuerza es  $F = qvB = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(4.0 \times 10^3 \text{ m/s})(3.5 \times 10^{-7} \text{ T})$ .

**Sección 28.3** En este caso el campo magnético  $\vec{B}_1$  debido al alambre 1 tiene la dirección  $y$  positiva, como en la figura 28.7, pero el campo  $\vec{B}_2$  debido al alambre 2 tiene la dirección  $y$  negativa. El punto  $P_2$  es equidistante de los dos alambres; por tanto,  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  tienen la misma magnitud. En consecuencia, los dos campos se cancelan y el campo total  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  en  $P_2$  es cero.

**Sección 28.4** La fuerza es de repulsión porque las corrientes tienen sentidos opuestos. La fuerza por unidad de longitud es  $F/L = \mu_0 I I' / 2\pi r = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})(1 \text{ A})(1 \text{ A}) / [2\pi(4 \times 10^{-3} \text{ m})] = 5 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ . Este valor es tan pequeño que la fuerza es totalmente insignificante. (Contraste este resultado con el ejemplo 28.5, que describe una situación con corrientes y fuerzas mucho más grandes).

**Sección 28.5** En el caso de un segmento sobre el eje  $y$  y negativo (en la parte inferior de la espira de la figura 28.12),  $d\vec{l}$  tiene la dirección  $z$  negativa. Los vectores  $\vec{r}$  y  $\hat{r}$  yacen en el plano  $xy$  y apuntan desde la parte inferior de la espira hacia  $P$ . El campo  $d\vec{B}$  tiene la misma dirección que  $d\vec{l} \times \hat{r}$ , por tanto, tiene una componente  $x$  positiva, una componente  $y$  negativa y una componente  $z$  de cero. En comparación con el campo debido a un segmento de la parte superior de la espira, este  $d\vec{B}$  tiene la misma magnitud pero ha girado  $180^\circ$  en torno al eje de las  $x$ :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$dB_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad dB_z = 0$$

En el caso de un segmento sobre el eje  $z$  negativo (en el lado derecho de la espira de la figura 28.12),  $d\vec{l}$  tiene la dirección  $y$  positiva. Los vectores  $\vec{r}$  y  $\hat{r}$  (que apuntan desde el segmento hacia  $P$ ) yacen en el plano  $xz$  y apuntan desde el lado derecho de la espira hacia  $P$ . El campo  $d\vec{B}$  tiene la dirección de  $d\vec{l} \times \hat{r}$ , por esto, tiene una componente  $x$  positiva, una componente  $y$  de cero y una componente  $z$  negativa. En comparación con el campo debido a un segmento de la parte superior de la espira, este  $d\vec{B}$  tiene la misma magnitud pero ha girado  $90^\circ$  en torno al eje de las  $x$ :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad dB_y = 0$$

$$dB_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

**Sección 28.6** Suponga que lleva a cabo la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  con base en un trayecto de integración que sigue la espira cerrada de una línea de campo magnético en la dirección del campo. En cada punto a lo largo del trayecto, el campo  $\vec{B}$  y el segmento infinitesimal  $d\vec{l}$  ambos son tangentes al trayecto; por tanto,  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  es positivo en todos los puntos y la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  debe ser igualmente positiva. (La figura 28.15a muestra un trayecto de integración de esta clase). Dado que la integral no es cero, se deduce de la ley de Ampere,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ , que debe haber una corriente  $I_{\text{enc}}$  encerrada por el trayecto de integración y, por tanto, por la espira cerrada de la línea de campo. Cada línea de campo cerrada de la figura 27.11a encierra parte del espacio vacío afuera del imán (donde no puede haber corrientes) y parte del interior del imán. Por consiguiente, debe haber corrientes adentro del imán (véase la sección 28.8).

**Sección 28.7** Por simetría, todo campo  $\vec{B}$  exterior al cable debe circular alrededor del cable, con líneas de campo circulares como las que rodean al conductor cilíndrico sólido de la figura 28.18. Elija un trayecto de integración como el de la figura 28.18, con radio  $r > R$ , de modo que el trayecto encierre totalmente el cable. Como en el ejemplo 28.9, la magnitud de la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  correspondiente a este trayecto es  $B(2\pi r)$ . De acuerdo con la ley de Ampere esto es igual a  $\mu_0 I_{\text{enc}}$ . La corriente neta encerrada  $I_{\text{enc}}$  es cero porque incluye dos corrientes de igual magnitud pero de sentidos opuestos: una en el alambre central y una en el cilindro hueco. Por tanto,  $B(2\pi r) = 0$ , por lo que  $B = 0$  respecto a cualquier valor de  $r$  afuera del cable. (El campo es diferente de cero *adentro* del cable; véase el ejercicio 28.32).

## Preguntas para análisis

**P28.1** Un tema de interés actual en la investigación en física es la búsqueda (hasta ahora sin éxito) de un polo magnético aislado, o *monopolo* magnético. De hallarse una entidad de esta naturaleza, ¿cómo se la reconocería? ¿Cuáles serían sus propiedades?

**P28.2** El flujo de partículas con carga que el Sol emite durante los periodos de actividad solar genera una perturbación en el campo magnético de la Tierra. ¿Cómo ocurre esto?



**P28.3** En el texto se analiza el campo magnético de un conductor recto infinitamente largo que transporta una corriente. Desde luego, no existe *nada* infinitamente largo. ¿Cómo decidiría usted si un alambre en particular es suficientemente largo para considerarlo infinito?

**P28.4** Dos conductores paralelos que transportan corriente en la misma dirección se atraen mutuamente. Si se les permite trasladarse uno hacia el otro, las fuerzas de atracción realizan trabajo. ¿De dónde proviene la energía? ¿Contradice esto la aseveración del capítulo 27 acerca de que las fuerzas magnéticas que actúan sobre cargas en movimiento no realizan trabajo? Explique su respuesta.

**P28.5** En ciertos casos los pares de conductores que introducen o toman corriente de los componentes de suministro de potencia de los equipos electrónicos se retuercen uno sobre otro para reducir los efectos de los campos magnéticos. ¿Por qué es favorable esto?

**P28.6** Suponga que tiene tres alambres paralelos largos, dispuestos de modo que, vistos en sección transversal, se hallan en los vértices de un triángulo equilátero. ¿Hay alguna manera de disponer las corrientes de modo que los tres alambres se atraigan mutuamente? ¿Y de modo que los tres alambres se repelan unos a otros? Explique su respuesta.

**P28.7** Al deducir la fuerza sobre uno de los conductores largos portadores de corriente en la sección 28.4, ¿por qué utilizamos el campo magnético debido a sólo uno de los conductores? Es decir, ¿por qué no utilizamos el campo magnético *total* debido a *los dos* conductores?

**P28.8** Dos espiras circulares en un mismo plano concéntricas de alambre de diferente diámetro transportan corrientes en el mismo sentido. Describa la naturaleza de las fuerzas que se ejercen sobre la espira interior y sobre la espira exterior.

**P28.9** Se envió una corriente a través de un resorte helicoidal. El resorte se contrajo como si hubiese sido comprimido. ¿Por qué?

**P28.10** ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de la ley de Ampere y de la ley de Biot y Savart respecto al cálculo práctico de campos magnéticos?

**P28.11** Las líneas de campo magnético nunca tienen principio ni fin. Con base en esto, explique por qué es razonable que el campo de un solenoide toroidal esté confinado en su totalidad en su interior, en tanto que un solenoide recto *debe* tener cierto campo afuera.

**\*P28.12** ¿Por qué es de esperar que la permeabilidad de un material paramagnético disminuya al aumentar la temperatura?

**\*P28.13** Si se suspende un imán sobre un recipiente de aire líquido, atrae gotitas hacia sus polos. Las gotitas contienen sólo oxígeno líquido; a pesar de que el nitrógeno es el principal componente del aire, no es atraído hacia el imán. Explique lo que esto revela acerca de las susceptibilidades magnéticas respectivas del oxígeno y del nitrógeno, y explique por qué un imán no atrae moléculas de oxígeno *gaseoso* hacia sus polos cuando está en aire a la temperatura ambiente ordinaria.

**\*P28.14** ¿Qué aspectos de la estructura atómica determinan que un elemento sea diamagnético o paramagnético? Explique su respuesta.

**\*P28.15** La susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos depende en muy alto grado de la temperatura, pero la de los materiales diamagnéticos es casi independiente de la temperatura. ¿A qué se debe la diferencia?

**\*P28.16** Se coloca un cilindro de hierro de modo que tenga libertad de girar en torno a su eje. Inicialmente, el cilindro se halla en reposo y se le aplica un campo magnético de forma tal que se magnetice en una dirección paralela a su eje. Si se invierte de improviso la dirección del campo externo, también se invertirá la dirección de magnetización y el cilindro comenzará a girar en torno a

su eje. (A esto se le llama *efecto Einstein-de Haas*). Explique por qué el cilindro comienza a girar.

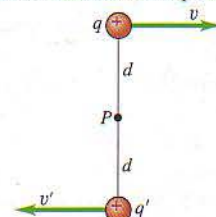
**\*P28.17** En el análisis de las fuerzas magnéticas sobre espiras de corriente de la sección 27.7 se comentó que no se ejerce ninguna fuerza neta sobre una espira completa en un campo magnético uniforme, sino sólo un momento de torsión. Sin embargo, los materiales magnetizados, que contienen espiras de corriente atómicas, experimentan ciertamente fuerzas netas en los campos magnéticos. ¿Cómo se resuelve esta discrepancia?

## Ejercicios

### Sección 28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

**28.1** Una carga puntual de  $+6.00 \mu\text{C}$  se desplaza a  $8.00 \times 10^6 \text{ m/s}$  constantes en la dirección  $+y$  respecto a un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen de este marco de referencia, ¿cuál es el vector de campo magnético  $\vec{B}$  que produce en los puntos siguientes? a)  $x = 0.500 \text{ m}$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ; b)  $x = 0$ ,  $y = -0.500 \text{ m}$ ,  $z = 0$ ; c)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = +0.500 \text{ m}$ ; d)  $x = 0$ ,  $y = -0.500 \text{ m}$ ,  $z = +0.500 \text{ m}$ .

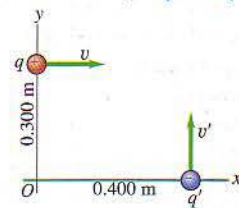
**28.2** Dos cargas puntuales positivas  $q = +8.00 \mu\text{C}$  y  $q' = +3.00 \mu\text{C}$  se desplazan respecto a un observador situado en el punto  $P$ , como se muestra en la figura 28.29. La distancia  $d$  es de  $0.120 \text{ m}$ . Cuando las dos cargas se hallan en las posiciones que se muestran en la figura, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto que crean en el punto  $P$ ? Considere  $v = 4.50 \times 10^6 \text{ m/s}$  y  $v' = 9.00 \times 10^6 \text{ m/s}$ .



**Figura 28.29** Ejercicios 28.2 y 28.6.

**28.3** Una carga de  $-4.80 \mu\text{C}$  se desplaza a una rapidez constante de  $6.80 \times 10^5 \text{ m/s}$  en la dirección  $+x$  respecto a un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen, ¿cuál es el vector de campo magnético que produce en los puntos siguientes? a)  $x = 0.500 \text{ m}$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ; b)  $x = 0$ ,  $y = 0.500 \text{ m}$ ,  $z = 0$ ; c)  $x = 0.500 \text{ m}$ ,  $y = 0.500 \text{ m}$ ,  $z = 0$ ; d)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0.500 \text{ m}$ .

**28.4** a) En el ejercicio 28.2, ¿cuáles son las fuerzas (magnitud y dirección) que cada carga ejerce sobre la otra? ¿Cuáles son las fuerzas de Coulomb que las cargas ejercen una sobre otra, y cuál es la proporción de la magnitud de la fuerza de Coulomb respecto a la magnitud de la fuerza magnética? b) Si se invierte la dirección de  $\vec{v}'$ , de modo que ambas cargas se desplacen en la misma dirección, ¿cuáles son la magnitud y dirección de las fuerzas magnéticas que las dos cargas ejercen entre sí?



**Figura 28.30** Ejercicio 28.5 y problema 28.46.

**28.5** Un par de cargas puntuales  $q = +4.00 \mu\text{C}$  y  $q' = -1.50 \mu\text{C}$ , se desplazan en un marco de referencia como se muestra en la figura 28.30. En este instante, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético creado en el origen? Considere  $v = 2.00 \times 10^6 \text{ m/s}$  y  $v' = 8.00 \times 10^5 \text{ m/s}$ .

**28.6** La figura 28.29 muestra dos cargas puntuales,  $q$  y  $q'$ , que se desplazan respecto a un observador situado en el punto  $P$ . Suponga

que la carga inferior es en efecto *negativa*, con  $q' = -q$ . a) Encuentre el campo magnético (magnitud y dirección) creado por las dos cargas en el punto  $P$  si i)  $v' = v/2$ ; ii)  $v' = v$ ; iii)  $v' = 2v$ . b) Encuentre la dirección de la fuerza magnética que  $q$  ejerce sobre  $q'$ , y también la dirección de la fuerza magnética que  $q'$  ejerce sobre  $q$ . c) Si  $v = v' = 3.00 \times 10^5$  m/s, ¿cuál es la proporción de las magnitudes respectivas de la fuerza magnética y de la fuerza de Coulomb que actúan sobre cada carga?

### Sección 28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

**28.7** a) En el inciso (b) del ejemplo 28.2 (sección 28.2), ¿cuál es el vector unitario  $\hat{r}$  (expresado en términos de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ ) que apunta desde  $d\vec{l}$  hacia el punto  $P_2$ ? b) Calcule la magnitud y dirección de  $d\vec{l} \times \hat{r}$ . c) Con base en el resultado del inciso (b) y la ecuación (28.6) proporcione la magnitud y dirección del campo magnético generado en el punto  $P_2$  por el segmento de 1.0 cm del alambre.

**28.8** Un alambre recto y largo que transporta una corriente de 200 A atraviesa una caja cúbica de madera, entrando y saliendo a través de orificios situados en el centro de caras opuestas (Fig. 28.31). La longitud de cada lado de la caja es de 20.0 cm. Considere un elemento  $d\vec{l}$  del alambre de 0.100 cm de

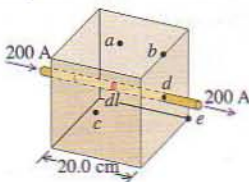


Figura 28.31 Ejercicio 28.8.

largo situado en el centro de la caja. Calcule la magnitud  $dB$  del campo magnético generado por este elemento en los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  de la figura 28.31. Los puntos  $a$ ,  $c$  y  $d$  se hallan en centros de caras del cubo; el punto  $b$  está en el punto medio de una arista, y el punto  $e$  se encuentra en un vértice. Copie la figura y muestre las direcciones y magnitudes relativas de los vectores de campo. (Nota: Suponga que  $d\vec{l}$  es pequeño en comparación con las distancias desde el elemento de corriente a los puntos donde se calculará el campo magnético).

**28.9** Un alambre recto y largo yace a lo largo del eje  $z$  y transporta una corriente de 4.00 A en la dirección  $+z$ . Busque el campo magnético (magnitud y dirección) generado en los puntos siguientes por un segmento de 0.500 mm del alambre con su centro en el origen: a)  $x = 2.00$  m,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ; b)  $x = 0$ ,  $y = 0.200$  m,  $z = 0$ ; c)  $x = 2.00$  m,  $y = 2.00$  m,  $z = 0$ ; d)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0.200$  m.

### Sección 28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

**28.10** En la figura 28.7a (ejemplo 28.4 de la sección 28.3), ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo neto creado por los alambres sobre el eje  $x$  en a)  $x = d/2$ ?; b) en  $x = -d/2$ ?

**28.11** Dos alambres rectos y largos, uno encima del otro, están separados por una distancia  $2a$  y son paralelos al eje de las  $x$ . El eje de las  $+y$  está en el plano de los alambres en dirección del alambre inferior al alambre superior. Cada alambre transporta la corriente  $I$  en la dirección  $+x$ . ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto de los dos alambres en un punto situado en el plano de los alambres a) a medio camino entre ambos?, b) a una distancia  $a$  arriba del alambre superior?, c) a una distancia  $a$  abajo del alambre inferior?

**28.12** Un alambre recto y largo yace a lo largo del eje  $y$  y transporta una corriente  $I = 8.00$  A en la dirección  $-y$  (Fig. 28.32). Además del campo magnético debido a la corriente en el alambre, hay un campo

magnético uniforme  $\vec{B}_0$  con una magnitud de  $1.50 \times 10^{-6}$  T en la dirección  $+x$ . ¿Cuál es el campo total (magnitud y dirección) en los puntos siguientes del plano  $xz$ ? a)  $x = 0$ ,  $z = 1.00$  m; b)  $x = 1.00$  m,  $z = 0$ ; c)  $x = 0$ ,  $z = -0.25$  m?

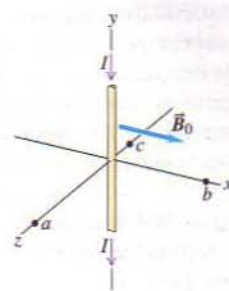


Figura 28.32 Ejercicio 28.12.

**28.13** Describa los detalles de la deducción de la ecuación (28.8) a partir de la ecuación que la antecede.

**28.14** Se desea generar un campo magnético con una magnitud de  $5.50 \times 10^{-4}$  T a una distancia de 0.040 m de un alambre recto y largo. a) ¿Qué corriente se requiere para generar este campo? b) Con la corriente hallada en el inciso (a), ¿cuál es la magnitud del campo a una distancia de 0.080 m desde el alambre y a 0.160 m?

**28.15** Efecto de las líneas de transmisión. Dos excursionistas leen una brújula debajo de una línea de transmisión elevada que está a 5.50 m de altura respecto al suelo y transporta una corriente de 800 A en dirección horizontal de norte a sur. a) Busque la magnitud y dirección del campo magnético en un punto del suelo situado directamente abajo del conductor. b) Uno de los excursionistas sugiere caminar otros 50 m para evitar lecturas inexactas de la brújula por efecto de la corriente. Considerando que la magnitud del campo terrestre es del orden de  $0.5 \times 10^{-4}$  T, ¿es realmente un problema la corriente?

**28.16** Dos alambres paralelos rectos y largos, separados por una distancia de 10.0 cm, transportan corrientes iguales de 4.00 A en la misma dirección, como se muestra en la figura 28.33. Proporcione la magnitud y dirección del campo magnético en a) el punto  $P_1$ , a medio camino entre los alambres; b) el punto  $P_2$ , a 25.0 cm a la derecha de  $P_1$ ; c) el punto  $P_3$ , a 20.0 cm directamente arriba de  $P_1$ .

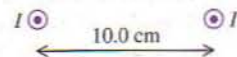


Figura 28.33 Ejercicio 28.16.

**28.17** Dos líneas de transmisión paralelas y largas, separadas 40.0 cm, transportan corrientes de 25.0 A y 75.0 A. Halle todos los puntos donde el campo magnético neto de los dos alambres es cero si estas corrientes fluyen a) en el mismo sentido; b) en sentidos opuestos.

**28.18** Cuatro líneas eléctricas paralelas y largas transportan corrientes de 100 A cada una. Un diagrama de sección transversal de estas líneas es un cuadrado de 20.0 cm por lado. Con respecto a cada caso que se muestra en la figura 28.34, calcule el campo magnético en el centro del cuadrado.

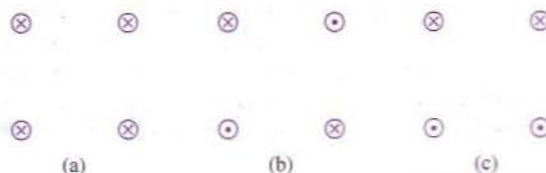


Figura 28.34 Ejercicio 28.18.

**28.19** Cuatro alambres conductores de corriente, muy largos y que yacen en un mismo plano, se cruzan de modo que forman un cua-

drado de 40.0 cm por lado, como se muestra en la figura 28.35. Halle la magnitud y dirección de la corriente  $I$  con la cual el campo magnético en el centro del cuadrado es cero.

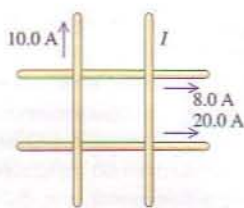


Figura 28.35 Ejercicio 28.19.

### Sección 28.4 Fuerza entre conductores paralelos

**28.20** Tres alambres paralelos transportan cada uno la corriente  $I$  en los sentidos que se indican en la figura 28.36. Si la separación entre alambres adyacentes es  $d$ , calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética neta por unidad de longitud sobre cada alambre.

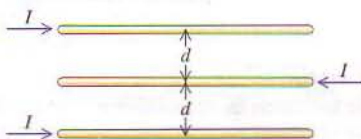


Figura 28.36 Ejercicio 28.20.

**28.21** Un alambre largo y horizontal  $AB$  descansa en la superficie de una mesa y transporta una corriente  $I$ . El alambre horizontal  $CD$  está verticalmente arriba del alambre  $AB$  y se desliza libremente hacia arriba y abajo en las dos guías metálicas verticales  $C$  y  $D$  (Fig. 28.37). El alambre  $CD$  está conectado a través de los contactos corredizos con otro alambre que también transporta una corriente  $I$ , en sentido opuesto a la corriente del alambre  $AB$ . La masa por unidad de longitud del alambre es  $\lambda$ . ¿Hasta qué altura  $h$  se elevará el alambre  $CD$ , suponiendo que la fuerza magnética que actúa sobre él se debe en su totalidad a la corriente del alambre  $AB$ ?

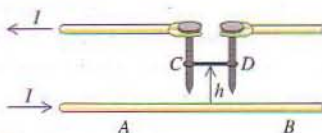


Figura 28.37 Ejercicio 28.21.

**28.22** Dos alambres paralelos y largos están separados por una distancia de 0.400 m (Fig. 23.38). Las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  tienen los sentidos que se indican. a) Calcule la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro. ¿Es la fuerza de atracción o de repulsión? b) Se duplican las dos corrientes, de modo que  $I_1$  es ahora de 10.0 A e  $I_2$ , de 4.00 A. ¿Cuál es ahora la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro?

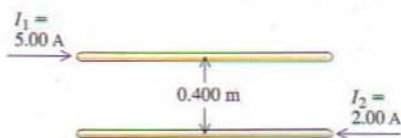


Figura 28.38 Ejercicio 28.22.

**28.23** Dos alambres paralelos largos están separados por una distancia de 2.50 cm. La fuerza por unidad de longitud que cada alambre ejerce sobre el otro es de  $4.00 \times 10^{-5}$  N/m y los alambres se repelen mutuamente. En uno de los alambres la corriente es de

0.600 A. a) ¿Cuál es la corriente en el segundo alambre? b) ¿Fluyen ambas corrientes en el mismo sentido o en sentidos opuestos?

### Sección 28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

**28.24** Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto  $P$  debido a la corriente en la sección semicircular de alambre de la figura 28.39. (Sugerencia: ¿Genera la corriente de la sección recta y larga del alambre algún campo en  $P$ ?)

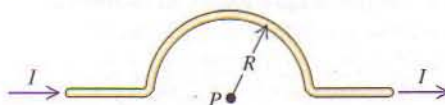


Figura 28.39 Ejercicio 28.24.

**28.25** Calcule la magnitud del campo magnético en el punto  $P$  de la figura 28.40 en términos del  $R$ ,  $I_1$  e  $I_2$ . ¿Qué resultado da su expresión cuando  $I_1 = I_2$ ?

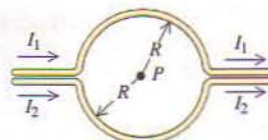


Figura 28.40 Ejercicio 28.25.

**28.26** Considere la espira de la figura 28.12. a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético de la espira en los puntos sobre el eje  $-x$ ? b) En la figura 28.12, en el punto  $P$  el campo apunta alejándose de la espira. ¿Cuál es la dirección del campo en el punto  $P$  si se invierte el sentido de la corriente en la espira? c) Una espira circular yace en el plano  $xy$ , con el origen en el centro de la espira. Al mirar hacia la espira, el eje  $z$  sale del plano hacia el observador. Si el momento magnético de la espira tiene la dirección  $-z$ , ¿fluye la corriente en la espira en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario? **28.27** Una bobina circular con devanado compacto y un radio de 2.40 cm tiene 800 espiras. a) ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina si el campo magnético en el centro de ésta es de 0.0580 T? b) ¿A qué distancia  $x$  del centro de la bobina, sobre el eje de ésta, alcanza el campo magnético la mitad del valor que tiene en el centro?

**28.28** Una bobina circular con devanado compacto y un diámetro de 4.00 cm tiene 600 espiras y conduce una corriente de 0.500 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a) en el centro de la bobina?, b) en un punto sobre el eje de la bobina a 8.00 cm de su centro?

**28.29** Una bobina con devanado compacto tiene un radio de 6.00 cm y conduce una corriente de 2.50 A. ¿Cuántas espiras debe tener si, en un punto sobre el eje de la bobina a 6.00 cm del centro de ésta, el campo magnético es de  $6.39 \times 10^{-4}$  T?

### Sección 28.6 Ley de Ampere

**28.30** Cierta curva cerrada encierra varios conductores. La integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  alrededor de esta curva es de  $3.83 \times 10^{-4}$  T·m. a) ¿Cuál es la corriente neta en los conductores? b) Si se integrara alrededor de la curva en el sentido opuesto, ¿cuál sería el valor de la integral de línea? Explique su respuesta.

**28.31** La figura 28.41 muestra, en sección transversal, varios conductores que transportan corriente a través del plano de la figura.

Las magnitudes de las corrientes son  $I_1 = 4.0 \text{ A}$ ,  $I_2 = 6.0 \text{ A}$  e  $I_3 = 2.0 \text{ A}$ , y las direcciones son las que se indican. Se muestran cuatro trayectos identificados de  $a$  a  $d$ . ¿Cuál es la integral de línea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  correspondiente a cada trayecto? Cada integral implica recorrer el trayecto en sentido contrario a las manecillas del reloj. Explique sus respuestas.

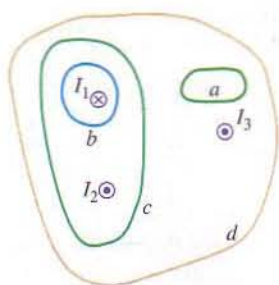


Figura 28.41 Ejercicio 28.31.

**Sección 28.7 Aplicaciones de la ley de Ampere**

**28.32 Cable coaxial.** Un conductor sólido de radio  $a$  está sostenido por discos aislantes sobre el eje de un tubo conductor de radio interior  $b$  y radio exterior  $c$  (Fig. 28.42). El conductor central y el tubo transportan corrientes iguales  $I$  en sentidos opuestos. Las corrientes se distribuyen uniformemente en las secciones transversales de cada conductor. Deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético a) en puntos situados afuera del conductor sólido central y adentro del tubo ( $a < r < b$ ); b) en puntos situados afuera del tubo ( $r > c$ ).

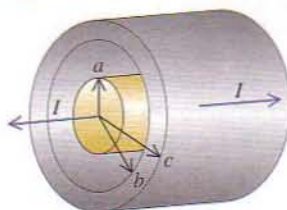


Figura 28.42 Ejercicios 28.32 y 28.33 y problema 28.70.

**28.33** Repita el ejercicio 28.32 aplicado al caso en el que la corriente en el conductor sólido central es  $I_1$ , en el tubo es  $I_2$ , y estas corrientes fluyen en el mismo sentido en vez de hacerlo en sentidos opuestos.

**28.34** Un solenoide de 15.0 cm de largo y 2.50 cm de radio tiene un devanado compacto con 600 espiras de alambre. La corriente en el devanado es de 8.00 A. Calcule el campo magnético en un punto cercano al centro del solenoide.

**28.35** Un solenoide ha sido proyectado para crear un campo magnético de 0.270 T en su centro. Tiene un radio de 1.40 cm y una longitud de 40.0 cm, y el alambre puede conducir una corriente máxima de 12.0 A. a) ¿Cuál es el número mínimo de espiras que debe tener el solenoide? b) ¿Cuál es la longitud total de alambre que se requiere?

**28.36** En su calidad de técnico electricista novato, usted debe proyectar un solenoide grande que produzca un campo magnético uniforme de 0.150 T cerca del centro del solenoide. Tiene alambre suficiente para 4000 espiras circulares. El solenoide debe tener 1.40 m de largo y 20.0 cm de diámetro. ¿Cuánta corriente se necesita para crear el campo especificado?

**28.37** Se ha conseguido un campo magnético de 37.2 T en el Francis Bitter National Magnetic Laboratory del MIT. Halle la corriente necesaria para crear un campo de esta naturaleza a) a 2.00 cm desde un alambre recto y largo; b) en el centro de una bobina circular de 42.0 cm de radio con 100 espiras; c) cerca del centro de un solenoide con un radio de 2.40 cm, una longitud de 32.0 cm y 40 000 espiras.

**28.38** Un solenoide toroidal (véase la figura 28.23) tiene un radio interior  $r_1 = 15.0 \text{ cm}$  y un radio exterior  $r_2 = 18.0 \text{ cm}$ . ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a las distancias siguientes del centro del toro? a) 12.0 cm; b) 16.0 cm; c) 20.0 cm.

**28.39** Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es de 14.0 cm se ha formado un devanado toroidal compacto de 600 espiras. Calcule

la magnitud del campo magnético en el centro de la sección transversal del devanado cuando la corriente en el devanado es de 0.650 A.

**\*Sección 28.8 Materiales magnéticos**

**\*28.40** Un solenoide toroidal con 400 espiras de alambre y un radio medio de 6.0 cm conduce una corriente de 0.25 A. La permeabilidad relativa del núcleo es de 80. a) ¿Cuál es el campo magnético en el núcleo? b) ¿Qué fracción del campo magnético se debe a corrientes atómicas?

**\*28.41** Un solenoide toroidal con 500 espiras está devanado sobre un anillo con un radio medio de 2.90 cm. Encuentre la corriente que se requiere en el devanado para establecer un campo magnético de 0.350 T en el anillo a) si el anillo es de hierro recocido ( $K_m = 1400$ ); b) si el anillo es de acero al silicio ( $K_m = 5200$ ).

**\*28.42** La corriente en el devanado de un solenoide toroidal es de 2.400 A. Tiene 500 espiras y su radio medio es de 25.00 cm. El solenoide toroidal está lleno de un material magnético. El campo magnético en el interior del devanado resulta ser de 1.940 T. Calcule a) la permeabilidad relativa; b) la susceptibilidad magnética del material que llena el toroide.

**\*28.43** Un solenoide largo con 60 espiras de alambre por centímetro conduce una corriente de 0.15 A. El alambre que constituye el solenoide está enrollado en torno a un núcleo sólido de acero al silicio ( $K_m = 5200$ ). (El alambre del solenoide está encamisado con un aislador para que nada de la corriente fluya al núcleo). a) Con respecto a un punto del interior del núcleo, halle las magnitudes de i) el campo magnético  $\vec{B}_0$  debido a la corriente del solenoide, ii) la magnetización  $\vec{M}$  y iii) el campo magnético total  $\vec{B}$ . b) En un dibujo del solenoide y el núcleo, muestre las direcciones de los vectores  $\vec{B}$ ,  $\vec{B}_0$  y  $\vec{M}$  en el interior del núcleo.

**\*28.44** Demuestre que las unidades  $\text{A}\cdot\text{m}^2$  y  $\text{J/T}$  del magnetón de Bohr son equivalentes.

**\*28.45 Ley de Curie.** A continuación se muestran algunas mediciones experimentales de la susceptibilidad magnética del alambre de hierro y amonio. Grafique  $1/\chi_m$  en función de la temperatura en Kelvin. ¿Obedece el material la ley de Curie? De ser así, ¿cuál es la constante de Curie?

$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\chi_m$
-258.15	$129 \times 10^{-4}$
-173	$19.4 \times 10^{-4}$
-73	$9.7 \times 10^{-4}$
27	$6.5 \times 10^{-4}$

**Problemas**

**28.46** Un par de cargas puntuales,  $q = +8.00 \mu\text{C}$  y  $q' = -5.00 \mu\text{C}$ , se desplazan en un marco de referencia como se muestra en la figura 28.30, en cada caso con una rapidez  $v = 9.00 \times 10^6 \text{ m/s}$  y  $v' = 6.50 \times 10^4 \text{ m/s}$ . Cuando las cargas puntuales están en las posiciones que se indican en la figura, ¿qué fuerza magnética (magnitud y dirección) ejerce  $q'$  sobre  $q$ ?

**28.47** Un alambre recto y largo conduce una corriente de 2.50 A. Un electrón se desplaza cerca del alambre. En el instante en que el electrón está a 4.50 cm del alambre y viaja con una rapidez de  $6.00 \times 10^4 \text{ m/s}$  paralelo al alambre, en sentido opuesto a la corriente, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que el campo magnético de la corriente ejerce sobre el electrón?

**28.48** Un alambre recto y largo conduce una corriente de 25.0 A. Se dispara un electrón paralelo a este alambre con una velocidad de 250 km/s en el sentido de la corriente, a 2.00 cm del alambre. a) Proporcione la magnitud y dirección de la aceleración inicial del electrón. b) Halle la magnitud y dirección de un campo eléctrico uniforme que permitiría al electrón continuar viajando paralelo al alambre. c) ¿Es necesario incluir los efectos de la gravedad? Justifique su respuesta.

**28.49** En la figura 28.43, el ramal del circuito que incluye la batería se halla muy lejos de los dos segmentos horizontales que contienen dos resistores. Estos segmentos están a 5.00 cm uno del otro y su longitud es mucho mayor que 5.00 cm. Se dispara un protón a 650 km/s desde un punto intermedio entre los dos segmentos horizontales superiores del circuito. La velocidad inicial del protón está en el plano del circuito y se dirige hacia el alambre de arriba. Halle la magnitud y dirección de la fuerza magnética inicial sobre el protón.

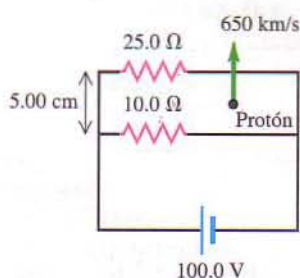


Figura 28.43 Problema 28.49.

**28.50** Dos espiras circulares idénticas de alambre, de 40.0 cm de diámetro cada una, conducen una corriente de 1.50 A en el mismo sentido. Estas espiras están paralelas entre sí y separadas por 25.0 cm. La línea  $ab$  es normal al plano de las espiras y pasa por su centro. Se dispara un protón a 2400 m/s perpendicular a la línea  $ab$  desde un punto intermedio entre los centros de las espiras. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que estas espiras ejercen sobre el protón justo después del disparo.

**28.51** Dos alambres rectos muy largos conducen corrientes, como se muestra en la figura 28.44. Con respecto a cada caso de la figura, halle todos los puntos donde el campo magnético neto es cero.

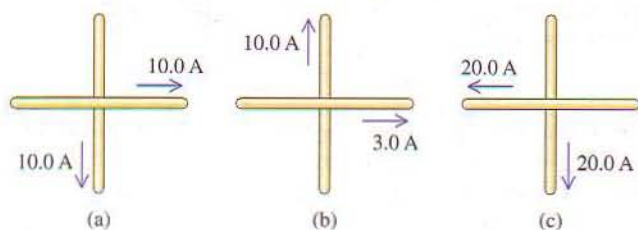


Figura 28.44 Problema 28.51.

**28.52** Una carga puntual negativa  $q = -7.20$  mC se desplaza en un marco de referencia. Cuando la carga puntual está en el origen, el campo magnético que genera en el punto  $x = 25.0$  cm,  $y = 0$ ,  $z = 0$  es  $\vec{B} = (6.00 \mu\text{T})\hat{j}$  y su rapidez es de 800 m/s. a) ¿Cuáles son las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la velocidad  $\vec{v}_0$  de la carga? b) En este mismo instante, ¿cuál es la magnitud del campo magnético que la carga genera en el punto  $x = 0$ ,  $y = 25.0$  cm,  $z = 0$ ?

**28.53** Un diseñador de imanes sin experiencia afirma que puede crear un campo magnético  $\vec{B}$  en un vacío que apunte en todas partes en la dirección  $x$  y cuya magnitud aumente con  $x$ . Es decir,  $\vec{B} = B_0(x/a)\hat{i}$ , donde  $B_0$  y  $a$  son constantes con unidades de teslas y metros, respectivamente. Con base en la ley de Gauss de los cam-

pos magnéticos, demuestre que que es imposible hacer esto. (Sugerencia: Utilice una superficie gaussiana con forma de caja rectangular, con aristas paralelas a los ejes de las  $x$ ,  $y$  y  $z$ ).

**28.54** Tres alambres paralelos largos están ubicados como se muestra en la figura 28.45. El alambre 2 está en el origen, el alambre 1 está sobre el eje  $y$  en  $y = 3.00$  cm y el alambre 3 está sobre el eje  $x$  en  $x = 4.00$  cm. Las corrientes son  $I_1 = 1.00$  A,  $I_2 = 2.00$  A e  $I_3 = 4.00$  A. a) Copie la figura 28.45 y muestre las direcciones de los campos magnéticos de los alambres 2 y 3 en el plano  $xy$  donde se encuentra el alambre 1. b) Busque las componentes  $x$  y  $y$  del campo magnético neto debido a las corrientes de los alambres 2 y 3 en el plano  $xy$  en la posición del alambre 1. c) Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta que ejercen sobre una sección de 1.00 cm del alambre 1 los otros dos alambres.

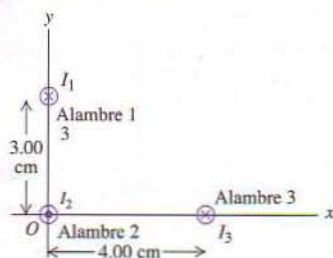


Figura 28.45 Problema 28.54.

**28.55** Dos alambres paralelos, rectos y largos están separados 1.00 m (Fig. 28.46). El alambre de arriba conduce una corriente  $I_1$  de 6.00 A hacia el plano del papel. a) ¿Cuáles deben ser la magnitud y dirección de la corriente  $I_2$  para que el campo neto en el punto  $P$  sea cero? b) En estas condiciones, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo neto en  $Q$ ? c) En estas condiciones, ¿cuál es la magnitud del campo neto en  $S$ ?

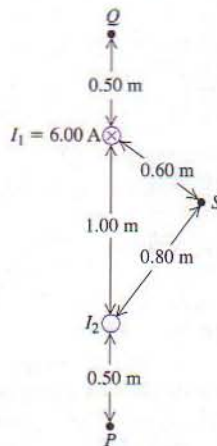


Figura 28.46 Problema 28.55.

**28.56** La figura 28.47 muestra una vista de los extremos de dos alambres paralelos largos perpendiculares al plano  $xy$ , cada uno de los cuales conduce una corriente  $I$ , aunque en sentidos opuestos. a) Copie el diagrama y dibuje vectores que muestren el campo  $\vec{B}$  de cada alambre y el campo neto  $\vec{B}$  en el punto  $P$ . b) Deduzca la expresión de la magnitud de  $\vec{B}$  en cualquier punto sobre el eje  $x$  en términos de la coordenada  $x$  del punto. ¿Cuál es la dirección de  $\vec{B}$ ? c) Grafique la magnitud de  $\vec{B}$  en puntos sobre el eje de las  $x$ . d) ¿En qué valor de  $x$  alcanza un máximo la magnitud de  $\vec{B}$ ? e) ¿Cuál es la magnitud de  $\vec{B}$  cuando  $x \gg a$ ?

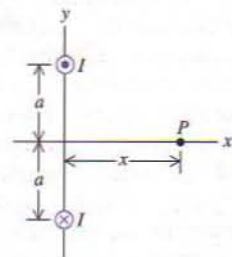


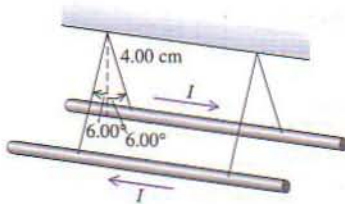
Figura 28.47 Problemas 28.56, 28.57 y 28.58.

**28.57** Repita el problema 28.56, pero con la corriente de ambos alambres de la figura 28.47 dirigida hacia el plano de la figura.

**28.58** Remítase a la situación del problema 28.56. Suponga que un tercer alambre recto y largo, paralelo a los otros dos, pasa por el punto  $P$  (véase la figura 28.47) y que cada alambre conduce una corriente  $I = 6.00$  A. Sean  $a = 40.0$  cm y  $x = 60.0$  cm. Proporcione la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de longitud sobre el tercer alambre a) si la corriente que fluye en él se dirige hacia el plano de la figura; b) si la corriente que fluye en él se aleja del plano de la figura.

**28.59** Dos alambres rectos de 3.50 m de largo, cada uno con una resistencia de  $0.250 \Omega$ , yacen paralelos uno al otro sobre una mesa horizontal uniforme. Sus extremos están enlazados por resortes ligeros, no conductores e idénticos, cada uno con una longitud (sin estirar) de 1.00 cm. Un alambre de resistencia insignificante conecta los alambres por un extremo. Cuando se cierra el interruptor para conectar una batería de 45.0 V entre los otros extremos de los alambres, los alambres se separan y quedan en reposo a 1.50 cm uno del otro. Halle las constantes de fuerza de los resortes.

**28.60 Medidor magnético de corriente.** En el lugar donde se halla su laboratorio, el campo magnético terrestre tiene una magnitud de  $1.0 \times 10^{-4}$  T y apunta hacia el norte. Un alambre recto y largo (alambre A) se extiende de norte a sur a lo largo del piso del laboratorio. Usted sabe que el alambre conduce corriente de norte a sur, pero desconoce su magnitud, y para averiguarla coloca otros dos alambres rectos y largos sobre el piso, paralelos al alambre A. El alambre B está 5.0 cm al este del alambre A, y el alambre C, a 10.0 cm al este del alambre B. Luego conecta fuentes de fem a los alambres B y C de modo que fluya una corriente constante de 1.0 A de sur a norte en el alambre B, en tanto que en el alambre C fluye una cantidad ajustable de corriente. Los alambres A y C están sujetos rigidamente al piso; en cambio, el alambre B puede deslizarse en él. Sus experimentos indican que el alambre B comienza a deslizarse en efecto hacia un lado u otro a menos que haya una corriente de 3.0 A de sur a norte en el alambre C. Si se cumple esta condición, el alambre B permanece en reposo. a) ¿Cuánta corriente fluye en el alambre A? b) Si se aumentase la corriente en el alambre C a 4.0 A, ¿en qué dirección tendería a deslizarse el alambre B?



**Figura 28.48** Problema 28.61.

**28.61** Dos alambres paralelos largos cuelgan de cordeles de 4.00 cm de largo sujetos a un eje común (Fig. 28.48). Los alambres tienen una masa por unidad de longitud de  $0.0125$  kg/m y conducen la misma corriente en sentidos opuestos. ¿Cuál es la corriente en cada alambre si los cordeles cuelgan a un ángulo de  $6.00^\circ$  respecto a la vertical?

**28.62** El alambre recto y largo  $AB$  que se muestra en la figura 28.49 conduce una corriente de 14.0 A. La espira rectangular cuyos

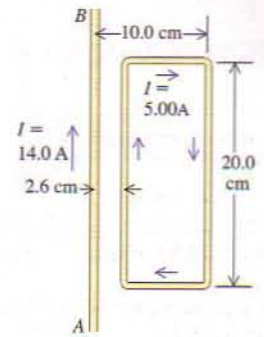
lados largos son paralelos al alambre conduce una corriente de 5.00 A. Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta que el campo magnético del alambre ejerce sobre la espira.

**28.63** Una espira circular de alambre de radio  $a$  tiene  $N$  espiras y conduce una corriente  $I$ . Una segunda espira con  $N'$  espiras y de radio  $a'$  conduce una corriente  $I'$  y está situada sobre el eje de la primera espira, a una distancia  $x$  del centro de ésta. La segunda espira está inclinada de modo que su eje forma un ángulo  $\theta$  con el eje de la primera espira. La distancia  $x$  es grande en comparación con  $a$  y con  $a'$ . a) Halle la magnitud del momento de torsión que la primera espira ejerce sobre la segunda. b) Encuentre la energía potencial de la segunda espira durante esta interacción. c) ¿Qué simplificaciones son posibles por ser  $x$  mucho mayor que  $a$ ? ¿Y por ser  $x$  mucho mayor que  $a'$ ?

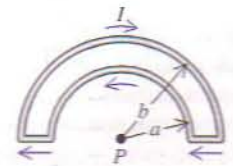
**28.64** Los semicírculos de alambre que se muestran en la figura 28.50 tienen radios  $a$  y  $b$ . Calcule el campo magnético neto (magnitud y dirección) que la corriente de los alambres generan en el punto  $P$ .

**28.65 Bobinas de Helmholtz.** La figura 28.51 muestra un corte de dos bobinas circulares de radio  $a$ , cada una devanada con  $N$  espiras de alambre que conducen una corriente  $I$ , la cual circula en el mismo sentido en ambas bobinas. Las bobinas están separadas por una distancia  $a$  igual a sus radios. En esta configuración las bobinas reciben el nombre de bobinas de Helmholtz; generan un campo magnético muy uniforme en la región comprendida entre ellas. a) Deduzca una expresión de la magnitud  $B$  del campo magnético en un punto sobre el eje a una distancia  $x$  a la derecha del punto  $P$ , el cual equidista de las bobinas. b) Grafique  $B$  en función de  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = a/2$ . Compare esta gráfica con una del campo magnético debido sólo a la bobina del lado derecho. c) A partir del inciso (a), obtenga una expresión de la magnitud del campo magnético en el punto  $P$ . d) Calcule la magnitud del campo magnético en  $P$  si  $N = 300$  espiras,  $I = 6.00$  A y  $a = 8.00$  cm. e) Calcule  $dB/dx$  y  $d^2B/dx^2$  en  $P$  ( $x = 0$ ). Comente de qué modo sus resultados muestran que el campo es muy uniforme cerca de  $P$ .

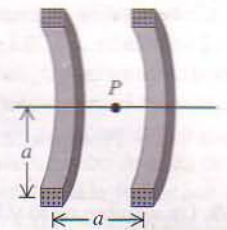
**28.66** Calcule la magnitud y dirección del campo magnético generado en el punto  $P$  de la figura 28.52 por la corriente  $I$  de la espira rectangular de alambre. (El punto  $P$  está en el centro del rectángulo.) (Sugerencia: El espacio del lado derecho donde los alambres entran y salen del rectángulo es tan pequeño, que este la-



**Figura 28.49** Problema 28.62.



**Figura 28.50** Problema 28.64.



**Figura 28.51** Problema 28.65.

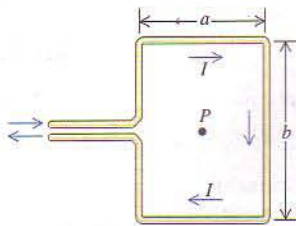


Figura 28.52 Problema 28.66.

do del rectángulo se puede tomar como un alambre continuo de longitud  $b$ .)

**28.67** El alambre de la figura 28.53 conduce una corriente  $I$  en el sentido que se muestra. El alambre se compone de una sección recta muy larga, un cuarto de círculo de radio  $R$  y otra sección recta y larga. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto en el centro de curvatura de la sección que es un cuarto de círculo (punto  $P$ )?

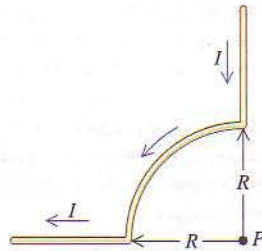


Figura 28.53 Problema 28.67.

**28.68** El alambre de la figura 28.54 es infinitamente largo y conduce una corriente  $I$ . Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que esta corriente genera en el punto  $P$ .

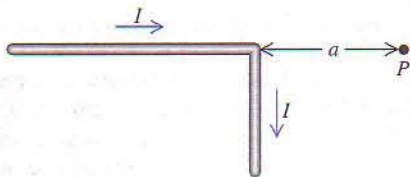


Figura 28.54 Problema 28.68.

**28.69** Un alambre recto y largo de sección transversal circular de radio  $R$  conduce una corriente  $I$ . Suponga que la densidad de corriente no es constante en toda la sección transversal del alambre, sino que varía según  $J = \alpha r$ , donde  $\alpha$  es una constante. a) De acuerdo con el requisito de que  $J$  integrada sobre la sección transversal del alambre da la corriente total  $I$ , calcule la constante  $\alpha$  en términos de  $I$  y  $R$ . b) Con base en la ley de Ampere, calcule el campo magnético  $B(r)$  correspondiente a i)  $r \leq R$ ; ii)  $r \geq R$ . Exprese sus respuestas en términos de  $I$ .

**28.70** a) Con respecto al cable coaxial del ejercicio 28.32, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético en puntos situados dentro del conductor sólido central ( $r < a$ ). Compare su resultado cuando  $r = a$  con los resultados del inciso (a) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto. b) Con respecto a este cable coaxial deduzca una expresión del campo adentro del tubo ( $b < r < c$ ). Compare su resultado cuando  $r = b$  con el inciso (a) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto. Compare su resultado cuando  $r = c$  con el inciso (b) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto.

**28.71** La dirección del campo eléctrico de una línea infinita de carga positiva es radial hacia afuera respecto al alambre y se calcula con base en la ley de Gauss del campo eléctrico (véase el ejem-

plo 22.6 de la sección 22.4). A partir de la ley de Gauss del magnetismo, demuestre que el campo magnético de un conductor recto, infinitamente largo y portador de corriente no puede tener una componente radial.

**28.72** Se fabrica un conductor en forma de un cilindro hueco de radios interno y externo  $a$  y  $b$ , respectivamente, el cual transporta una corriente  $I$ , uniformemente distribuida en toda su sección transversal. Deduzca expresiones de la magnitud del campo magnético en las regiones a)  $r < a$ ; b)  $a < r < b$ ; c)  $r > b$ .

**28.73** Conocer los campos magnéticos dentro y fuera de. Se le entrega un cilindro hueco de cobre de radio interno  $a$  y radio externo  $3a$ . La longitud del cilindro es  $200a$  y su resistencia eléctrica al flujo de corriente a lo largo de su extensión es  $R$ . A fin de evaluar su adaptabilidad para utilizarlo en un circuito, usted conecta los extremos del cilindro a una fuente de voltaje, con lo cual fluye una corriente  $I$  a lo largo del cilindro. La corriente se distribuye uniformemente en toda la sección transversal del cilindro. A usted le interesa conocer la intensidad del campo magnético que la corriente crea dentro de la parte sólida del cilindro, en un radio  $2a$  del eje del cilindro. Pero como no es fácil insertar una sonda de campo magnético en el metal sólido, usted decide medir en cambio el campo en un punto afuera del cilindro donde el campo debe ser tan intenso como en el radio  $2a$ . ¿A qué distancia del eje del cilindro debe usted colocar la sonda?

**28.74** Una espira circular de radio  $R$  conduce una corriente  $I_2$  en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 28.55). El centro de la espira está a una distancia  $D$  arriba de un alambre recto y largo. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la corriente  $I_1$  en el alambre si el campo magnético en el centro de la espira es cero?

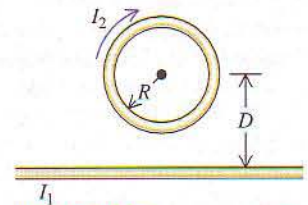


Figura 28.55 Problema 28.74.

**28.75** Un cilindro sólido, recto y largo, orientado con su eje en la dirección  $z$ , conduce una corriente cuya densidad de corriente es  $\vec{J}$ . La densidad de corriente, aunque es simétrica en torno al eje del cilindro, no es constante, sino que varía según la relación

$$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi a^2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \hat{k} \quad \text{con } r \leq a$$

$$= 0 \quad \text{con } r \geq a$$

donde  $a$  es el radio del cilindro,  $r$  es la distancia radial respecto al eje del cilindro e  $I_0$  es una constante con unidades de amperes. a) Demuestre que  $I_0$  es la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. b) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$  en la región  $r \geq a$ . c) Obtenga una expresión de la corriente  $I$  contenida en una sección transversal circular de radio  $r \leq a$  y centrada en el eje del cilindro. d) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$  en la región  $r \leq a$ . ¿Cómo son comparativamente los resultados de los incisos (a) y (b) cuando  $r = a$ ?

**28.76** Un cilindro sólido, recto y largo, orientado con su eje en la dirección  $z$ , conduce una corriente cuya densidad de corriente es  $\vec{J}$ .

La densidad de corriente, aunque es simétrica en torno al eje del cilindro, no es constante, sino que varía según la relación

$$\vec{J} = \left(\frac{b}{r}\right) e^{(r-a)/\delta} \hat{k} \quad \text{con } r \leq a$$

$$= 0 \quad \text{con } r \geq a$$

donde el radio del cilindro es  $a = 5.00$  cm,  $r$  es la distancia radial respecto al eje del cilindro,  $b$  es una constante igual a  $600$  A/m y  $\delta$  es una constante igual a  $2.50$  cm. a) Sea  $I_0$  la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. Obtenga una expresión de  $I_0$  en términos de  $b$ ,  $\delta$  y  $a$ . Evalúe su expresión para obtener un valor numérico de  $I_0$ . b) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$  en la región  $r \geq a$ . Exprese su respuesta en términos de  $I_0$  en vez de  $b$ . c) Obtenga una expresión de la corriente  $I$  contenida en una sección transversal circular de radio  $r \leq a$  y centrada en el eje del cilindro. Exprese su respuesta en términos de  $I_0$  en vez de  $b$ . d) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$  en la región  $r \leq a$ . e) Evalúe la magnitud del campo magnético en  $r = \delta$ ,  $r = a$  y  $r = 2a$ .

**28.77** Integre  $B_x$  como aparece en la ecuación (28.15) de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Es decir, calcule  $\int_{-\infty}^{+\infty} B_x dx$ . Explique el significado de su resultado.

**28.78** En una región del espacio donde no hay conducción ni corrientes de desplazamiento, es imposible tener un campo magnético uniforme que decaiga abruptamente a cero. Para probar este enunciado, aplique el método de contradicción: suponga que un caso de esta naturaleza es posible, y luego demuestre que su suposición contradice una ley de la naturaleza. a) En la mitad inferior de una hoja de papel, dibuje líneas horizontales uniformemente espaciadas que representen un campo magnético hacia su derecha. Dibuje con líneas punteadas un rectángulo  $abcd$  con el lado horizontal  $ab$  en la región de campo magnético y el lado horizontal  $cd$  en la mitad superior de su hoja de papel donde  $B = 0$ . b) Demuestre que la integración alrededor de su rectángulo contradice la ley de Ampere.

**28.79 Lámina infinita de corriente.** Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente  $I$ , para formar una lámina infinita de corriente (Fig. 28.56). Los conductores yacen en el plano  $xy$ , son paralelos al eje de las  $y$  y transportan corriente en la dirección  $+y$ . Hay  $n$  conductores por unidad de longitud medida a lo largo del eje de las  $x$ . a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético a una distancia  $a$  abajo de la lámina de corriente? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético a una distancia  $a$  arriba de la lámina de corriente?

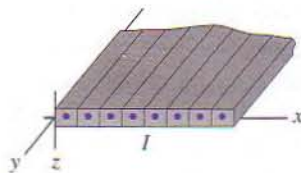


Figura 28.56 Problema 28.79.

**28.80** Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente  $I$ , para formar una lámina infinita de corriente donde la dirección de la corriente es hacia afuera del plano de la página (Fig. 28.57). Hay una segunda lámina infinita de corriente a una distancia  $d$  abajo de la primera y paralela a ella. La segunda lámina

conduce corriente hacia el plano de la página. Cada lámina tiene  $n$  conductores por unidad de longitud. (Consulte el problema 28.79). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético neto en a) el punto  $P$  (arriba de la lámina superior); b) el punto  $R$  (equidistante de las dos láminas); c) el punto  $S$  (abajo de la lámina inferior).

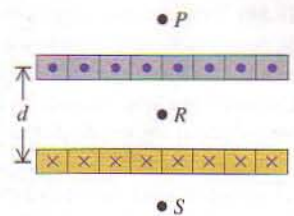


Figura 28.57 Problema 28.80.

**\*28.81** Un trozo de hierro tiene una magnetización  $M = 6.50 \times 10^4$  A/m. Halle el momento dipolar magnético promedio por átomo de este trozo de hierro. Exprese su respuesta tanto en  $\text{A}\cdot\text{m}^2$  como en magnetones de Bohr. La densidad del hierro aparece en la tabla 14.1 y su masa atómica (en gramos por mol), en el apéndice D. El símbolo químico del hierro es Fe.

**\*28.82** a) En la sección 27.7 analizamos cómo es que un imán permanente atrae o repele un dipolo magnético, una espira de corriente o un objeto magnetizado (véanse las figuras 27.34 y 27.36). Con base en esto, explique por qué *cualquiera* de los polos de un imán atrae tanto los materiales paramagnéticos como los materiales ferromagnéticos (inicialmente sin magnetizar), pero repele los materiales diamagnéticos. b) La fuerza que un imán ejerce sobre un objeto es directamente proporcional al momento magnético del objeto. Cierta imán en particular es apenas lo suficientemente fuerte para levantar un cubo de hierro recocido ( $K_m = 1400$ ) de  $2.00$  cm de lado de modo que el hierro se adhiera a uno de los polos del imán; es decir, el imán ejerce una fuerza ascendente sobre el cubo de hierro igual al peso de éste. Si en cambio se intentase levantar con este imán un cubo de aluminio de  $2.00$  cm, ¿cuál sería la fuerza ascendente que actúa sobre el cubo? ¿Cómo es esta fuerza en comparación con el peso del cubo? ¿Podría el imán levantar el cubo? (Sugerencia: Se necesita información de las tablas 14.1 y 28.1). c) Si se intentase levantar con este imán un cubo de plata de  $2.00$  cm, ¿cuáles serían la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el cubo? ¿Cómo es esta fuerza en comparación con el peso del cubo? ¿Serían apreciables los efectos de la fuerza magnética?

Problemas de desafío

**28.83** Dos alambres conductores rectos y largos con densidad lineal de masa  $\lambda$  están suspendidos de cordeles en posición horizontal, paralelos uno al otro y separados por una distancia  $d$ . Los extremos posteriores de los alambres están conectados entre sí por un alambre de conexión flojo de poca resistencia. Ahora se incorpora al sistema un capacitor cargado (capacitancia  $C$ ); la placa positiva del capacitor (carga inicial  $+Q_0$ ) se conecta al extremo anterior de uno de los alambres y la placa negativa (carga inicial  $-Q_0$ ), al extremo anterior del otro alambre (Fig.

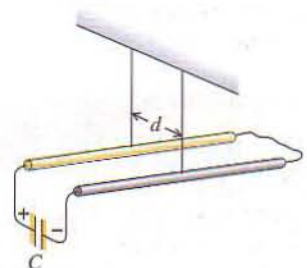


Figura 28.58 Problema de desafío 28.83.



28.58). También estas dos conexiones se hacen con alambres flojos de poca resistencia. Una vez establecida la conexión, la fuerza de repulsión entre los alambres los empuja hacia los lados, y cada alambre tiene una velocidad horizontal inicial de magnitud  $v_0$ . Suponga que el tiempo de descarga del capacitor es insignificante en comparación con el tiempo necesario para que ocurra un desplazamiento apreciable de la posición de los alambres. a) Demuestre que la rapidez inicial  $v_0$  de cualquiera de los alambres está dada por

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda R C d}$$

donde  $R$  es la resistencia total del circuito. b) Halle el valor numérico de  $v_0$  si  $\lambda = 4.50 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ ,  $d = 3.00 \text{ cm}$ ,  $C = 2.50 \mu\text{F}$  y  $R = 0.0480 \Omega$ , y si se cargó inicialmente el capacitor conectándolo a una fuente de  $3.00 \text{ kV}$ . c) ¿A qué altura  $h$  se elevará cada alambre como resultado de la conexión del circuito?

**28.84** Una banda aislante larga y ancha tiene una carga positiva uniforme por unidad de área  $\sigma$  en su cara superior. Unos rodillos situados en cada extremo trasladan la banda hacia la derecha con rapidez constante  $v$ . Calcule la magnitud y dirección del campo magnético generado por la banda en movimiento en un punto inmediatamente arriba de su superficie. (*Sugerencia:* En los puntos cercanos a la superficie y alejados de sus bordes o extremos, se puede considerar que la banda es una lámina infinita de corriente como la del problema 28.79).

**28.85 Disco dieléctrico con carga.** Un disco delgado de material dieléctrico y de radio  $a$  tiene una carga total  $+Q$  distribuida unifor-

memente en toda su superficie. El disco gira  $n$  veces por segundo sobre un eje perpendicular a la superficie del disco y que pasa por su centro. Halle el campo magnético en el centro del disco. (*Sugerencia:* Divida el disco en anillos concéntricos de anchura infinitesimal).

**28.86** Un alambre con forma de un semicírculo de radio  $a$  está orientado en el plano  $yz$  con su centro de curvatura en el origen (Fig. 28.59). Si la corriente en el alambre es  $I$ , calcule las componentes del campo magnético generado en el punto  $P$ , a una distancia  $x$  hacia afuera a lo largo del eje  $x$ . (*Nota:* No olvide la contribución del alambre recto de la parte inferior del semicírculo que va de  $z = -a$  a  $z = +a$ . Puede utilizar el hecho de que los campos de dos corrientes paralelas en  $z > a$  se cancelan, pero deberá explicar *por qué* se cancelan).

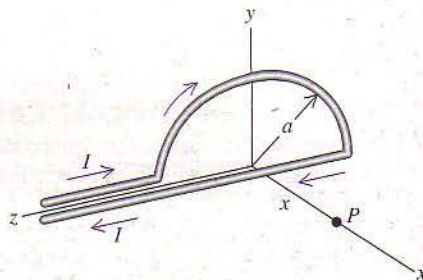


Figura 28.59 Problema de desafío 28.86.